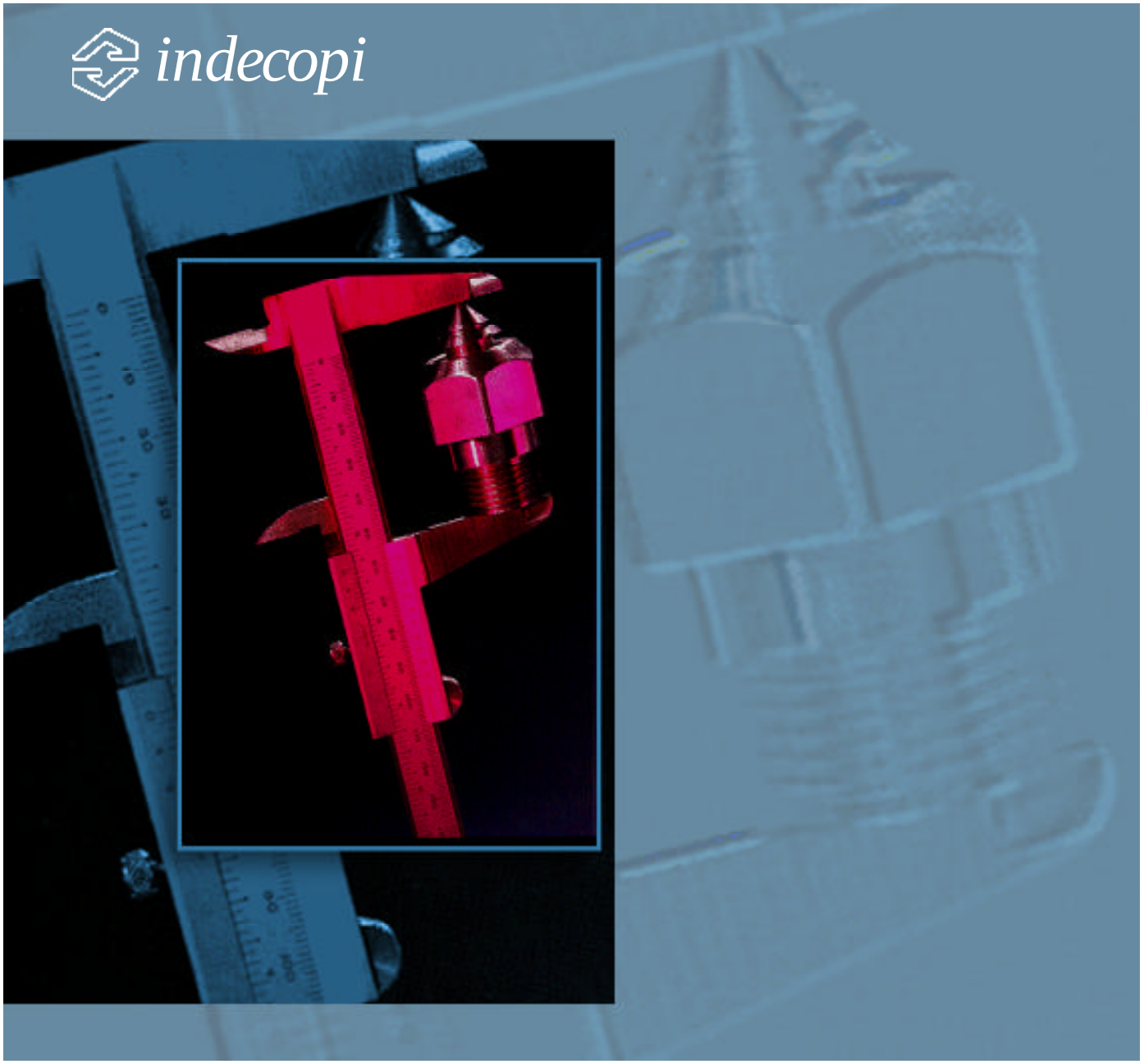

Guía: «para la Expresión de la Incertidumbre en la Medición»

SERVICIO NACIONAL DE METROLOGÍA

GUÍA PARA LA

Expresión de la Incertidumbre en la Medición

indecopi

Sello Editorial

Guía para la Expresión de la
Incertidumbre en la Medición

Instituto Nacional de Defensa de la Competencia y de la
Protección de la Propiedad Intelectual

Dirección: Calle de la Prosa 138 San Borja, Lima, PERÚ.
Teléfono: 224 7800
e-mail: postmaster@indecopi.gob.pe
Web site: www.indecopi.gob.pe

Con autorización de ISO

Primera edición: setiembre de 1999
Segunda edición: julio del 2001

Las sugerencias y comentarios pueden ser remitidas al Sello Editorial de Indecopi por teléfono (511) 224 7800 anexo 1503 o vía correo electrónico: sello@indecopi.gob.pe

Impreso en Lima - Printed in Perú

Contenido

Pág.

Presentación VII

Preámbulo IX

Prefacio XVII

0. Introducción XIX

1. Campo de Aplicación 1

2. Definiciones 3
   2.1 Términos metrológicos generales 3
   2.2 El término "incertidumbre" 3
   2.3 Términos específicos para esta Guía 5

3 Conceptos Básicos 7
   3.1 Medición 7
   3.2 Errores, efectos y correcciones 9
   3.3 Incertidumbre 10
   3.4 Consideraciones prácticas 13

4. Evaluación de la incertidumbre estándar 16
   4.1 Modelando la medición 16
   4.2 Evaluación de Tipo A de incertidumbre estándar 19
   4.3 Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar 22
   4.4 Ilustración gráfica de la evaluación de la incertidumbre estándar 29

5. Determinación de la incertidumbre estándar combinada 34
   5.1 Magnitudes de entrada no correlacionadas 34
   5.2 Magnitudes de entrada correlacionadas 38

6. Determinación de la incertidumbre expandida 42
6.1 Introducción 42
6.2 Incertidumbre expandida 43
6.3 Elección de un factor de cobertura 44

7. Expresión de la incertidumbre 46
7.1 Guía general 46
7.2 Guía específica 47

8. Resumen del procedimiento para la evaluación y expresión de la incertidumbre 52

ANEXOS

A Recomendaciones del Grupo de Trabajo y del CIPM 54
A.1 Recomendación INC-1 (1980) 54
A.2 Recomendación 1 (CI-1981) 55
A.3 Recomendación 1 (CI-1986) 56

B Términos metrológicos generales 58
B.1 Fuente de las definiciones 58
B.2 Definiciones 58

C. Términos y conceptos estadísticos básicos 68
C.1 Fuente de las definiciones 68
C.2 Definiciones 68
C.3 Elaboración de términos y conceptos 76

D Valor "verdadero", error e incertidumbre 82
D.1 El mensurando 82
D.2 La magnitud realizada 83
D.3 El valor "verdadero" y el valor corregido 83
D.4 Error 85
D.5 Incertidumbre 85
D.6 Representaciones gráficas 86

E Motivaciones y Bases para la Recomendación INC-1 (1980) 90
E.1 "Seguro", "aleatorio" y sistemático" 90
E.2 Justificación para evaluaciones realistas de la incertidumbre 91
E.3 Justificación para tratar todas las componentes de incertidumbre de manera idéntica 92
E.4 La desviación estándar como una medida de la incertidumbre 97
E.5 Una comparación entre los dos puntos de vista sobre la incertidumbre 100

F. Guía práctica para la evaluación de las componentes de la incertidumbre 102
F.1 Componentes evaluadas a partir de observaciones repetidas Evaluación de Tipo A de la incertidumbre estándar 102
F.2 Componentes evaluadas por otros medios. Evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar 108

G. Grados de libertad y niveles de confianza 121
G.1 Introducción 121
G.2 Teorema del límite central 123
G.3 La distribución t y los grados de libertad 125
G.4 Grados efectivos de libertad 127
G.5 Otras consideraciones 130
G.6 Resumen y conclusiones 133

H. Ejemplos 137
H.1 Calibración de bloque patrón 138
H.2 Medición simultánea de resistencia y reactancia 147
H.3 Calibración de un termómetro 156
H.4 Medición de radio actividad 162
H.5 Análisis de varianza 171
H.6 Mediciones sobre una escala de referencia: dureza 181

J. Glosario de los principales símbolos 190

K. Bibliografía 197

Indice alfabético 200

Presentación

Con el objetivo de disponer de un documento técnico que permita expresar adecuadamente los resultados de las mediciones, de la misma manera que se viene efectuando internacionalmente, el Servicio Nacional de Metrología-SNM del Perú, ha elaborado la presente Guía, en base a la versión en inglés corregida y reimpresa en 1995 de la "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" , editado por organizaciones de tan alto prestigio, como: BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML,

Los usuarios de esta Guía pueden tener la confianza del alto nivel técnico de este documento, puesto que la versión original es considerada actualmente como la fuente más autorizada a nivel mundial para la evaluación y expresión de la incertidumbre de medición.

Para elaborar la presente Guía no sólo se ha efectuado una traducción de la versión original en inglés sino además se ha tenido en cuenta las diversas versiones al castellano existentes elaboradas por el Centro Español de Metrología-CEM y el Centro Nacional de Metrología de México-CENAM, así como también la experiencia adquirida en los últimos años al aplicar estos principios a las mediciones efectuadas por el personal técnico de los laboratorios del SNM.

Al igual que en la Guía traducida por el CEM, el Preámbulo se ha adaptado del documento DFM-94-R16 sobre el Workshop de ISO/TAG4/WG3's. Lars Nielsen, Danish Institute of Fundamental Metrology, Lingby. 1994.

Esperamos que esta Guía sea de mucha utilidad para la evaluación, expresión y comparación de los resultados de las mediciones efectuadas en los diversos campos de la ciencia, industria y comercio de nuestro país.

*Preámbulo**

En 1993 la ISO presentó la primera edición de la "**Guía** para la expresión de la incertidumbre en la medición" (en adelante sólo la **Guía**), publicada conjuntamente por las organizaciones internacionales BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML.

La **Guía** está basada en la recomendación INC-1 (1980)[1] según la cual cualquier magnitud física bajo medición (el mensurando) debe ser tratada como una variable aleatoria, con su correspondiente esperanza matemática y su varianza. La incertidumbre estándar se define como la raíz cuadrada de un valor estimado de dicha varianza. La estimación de incertidumbres estándar puede realizarse mediante evaluaciones de Tipo A (estimaciones por métodos estadísticos) mediante evaluaciones de Tipo B (estimaciones por otros métodos) pero, una vez estimadas las incertidumbres, ambas son tratadas de la misma forma.

La **Guía** intenta ser válida para todos los tipos de mediciones, ya sean éstas electromagnéticas, mecánicas, físicas, microbiológicas o químicas. En 1992 , la International Laboratory Conference (ILAC) creó un grupo de trabajo sobre Incertidumbres, el cual tuvo la tarea de desarrollar ejemplos de aplicación de la **Guía** en ensayos específicos. El resultado de dicho trabajo fue presentado en la Conferencia de la ILAC en Hong Kong, en Octubre de 1994 . De igual manera, la European Cooperation for Accreditation of Laboratories (EAL)[2] dio los primeros pasos hacia criterios armonizados de acreditación sobre la estimación de la incertidumbre de medición en los ensayos.

* Adaptado del documento DFM-94-R-16 sobre el Workshop de ISO/TAG4/WG3´s . Lars Nielsen, Danish Institute of Fundamental Metrology, Lingby 1994

1 Esta Recomendación figura en la sección 0.7 de la Guía

2 EAL surgió de la unión de la Estern European Calibration Cooperation (WECC) y la Western European Laboratory Accreditation Cooperation (WELAC). Actualmente se denomina EA

Estados Unidos a través del National Institute of Standards and Technology (NIST, anteriormente, NBS) publicó la Technical Note 1297, basada enteramente en la **Guía** (edición 1994)

Se considera así que actualmente, a nivel mundial, esta **Guía** es pues, la mejor fuente autorizada sobre la estimación de las incertidumbres de medición.

La **Guía** es un documento extenso que consta de 100 páginas de información concentrada. En comparación, el Doc. 19-1990 de WECC poseía únicamente 15 páginas. Ello llevó a algunos lectores potenciales a pensar que la **Guía** era demasiado complicada para ser utilizada por laboratorios de calibración y ensayo de nivel medio. Estos lectores preferían documentos más simples y fáciles de leer. Sin embargo, la estimación de incertidumbres no es algo ni inmediato ni sencillo; al contrario, requiere un buen conocimiento de teoría sobre la medición, capacidad para identificar y cuantificar fuentes de incertidumbre y un cierto nivel de conocimientos matemáticos y estadísitcos.

Recientemente en abril de 1997 , la EA ha sustituido totalmente el Doc. 19-1990 de WECC por la publicación de referencia EAL-R2 , de 27 páginas, titulada en su original en inglés "Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration", la cual, como se dice en su presentación, está ya de acuerdo con las recomendaciones de la **Guía** para la expresión de la incertidumbre de medida a que nos referimos. Asimismo, EA ha publicado también el documento EAL-R2-SI, de 27 páginas, suplemento del anterior, el cual contiene ejemplos de aplicación del cálculo y estimación de incertidumbres en diferentes campos de calibración. Este documento intenta promocionar la utilización de procedimientos consistentes y representa un consenso entre los miembros de EA sobre cómo implantar los requerimientos establecidos en el documento EAL-R2 por los laboratorios acreditados.

Qué contiene la Guía

La **Guía** está dividida en 8 secciones principales (28 páginas) en las que se exponen las directrices generales, y en 11 anexos, en los que se puede obtener información más específica, si el lector lo requiere. Con objeto de dar una visión estructurada de la **Guía**, describimos y comentamos a continuación el contenido de las 8 secciones principales:

Campo de aplicación

En esta sección se define la aplicabilidad de la **Guía**. Se manifiesta que la "**Guía** establece reglas generales para evaluar y expresar la incertidumbre en la medición, las cuales pueden seguirse para diversos niveles de exactitud y en campos variados - desde el taller hasta la investigación básica". Se hace hincapié en que la **Guía** solamente describe cómo estimar la incertidumbre, y no cómo puede utilizarse esta estimación para tomar decisiones.

Definiciones

En esta sección se incluyen definiciones de términos importantes como incertidumbre (de medición), incertidumbre estándar, evaluación de Tipo A (de incertidumbre), evaluación de Tipo B (de incertidumbre), incertidumbre estándar combinada, incertidumbre expandida y factor de cobertura (también conocido como factor k).

Las definiciones de los términos metrológicos generales utilizados en la **Guía** se han tomado del Vocabulario Internacional de términos básicos y generales de Metrología (VIM), encontrándose un listado en el anexo B de la **Guía**. Si el lector no se encuentra fuerte en estadística, en el anexo C puede encontrar definiciones de algunos términos y conceptos estadísticos básicos.

Conceptos básicos

Esta sección se ocupa de conceptos básicos como medición, errores, efectos, correcciones e incertidumbre. En el anexo D de la **Guía** se discute y profundiza en la importante distinción entre error e incertidumbre: El error es la diferencia entre el resultado de una medición y un valor (verdadero) del mensurando, y es debido a imperfecciones de la medición. El error posee una componente sistemática y una aleatoria. La componente sistemática es debida a efectos sistemáticos, los cuales no varían cuando se repite la medición, y puede ser eliminada hasta cierto punto aplicando una corrección, la cual lleva asociada una incertidumbre estimada. La componente aleatoria es debida a efectos aleatorios que causan variaciones en el resultado de medida cuando se repite la medición. Esta componente no puede eliminarse, pero puede reducirse promediando sobre un gran número de mediciones. En otras palabras: tanto los errores sistemáticos como los aleatorios son tratados como variables aleatorias con varianzas dadas, que necesitan ser estimadas. La única diferencia estriba en que el error aleatorio posee una esperanza nula, mientras que el error sistemático tiene una esperanza distinta de cero (la cual debe ser corregida).

En la misma sección de la **Guía**, se analizan los conceptos de evaluación de Tipo A y de Tipo B de incertidumbre. En la evaluación de Tipo A, la incertidumbre se estima por métodos estadísticos. Esto no admite discusión, siendo aceptado por todos y cada uno de los estadísticos. La evaluación de Tipo B se basa normalmente en el grado de credibilidad y confianza que se tiene sobre una magnitud dada, siendo su estimación más subjetiva. La idea de representar el grado de confianza de una medición mediante una función de distribución estadística es debida a Bayes (3) y, desde el año 1763 dividió a los estadísticos en dos escuelas: La escuela bayesiana (moderna) y la escuela anti-bayesiana. Esta última considera la estadística como la ciencia que trata datos objetivos de medición, y no aspectos subjetivos, como el grado de confianza. Por otro lado, uno de los mayores éxitos de la escuela bayesiana fue el desarrollo de la mecánica estadística de Boltzmann, de la que se dedujo las leyes de la termodinámica clasica.

Evaluación de la incertidumbre estándar

Después de las tres primeras secciones de la Guía, en las que la mente del lector ha sido preparada para pensar correctamente, comienza la evaluación de la incertidumbre.

En primer lugar, debe elegirse correctamente el modelo de medición. En prácticamente cualquier medición el mensurando no se mide directamente, sino que ha de calcularse a partir de un número de magnitudes de entrada, las cuales o se miden directamente, o se toman de fuentes externas, como tablas, certificados, etc. Es muy importante escoger el modelo adecuado. La elección de un mal modelo supondrá una estimación pobre de la incertidumbre. Un error común es incluir en el modelo únicamente aquellas magnitudes que son realmente utilizadas para calcular el resultado de medición, despreciando magnitudes importantes, de valor nominal nulo, como desviaciones respecto a condiciones de referencia especificadas, interferencias, etc.

En segundo lugar, las incertidumbres de todas las magnitudes de entrada deben estimarse siguiendo evaluaciones de Tipo A o de Tipo B.

Se incluye un ejemplo de evaluación de Tipo A (por métodos estadísticos): El caso típico, en el que la medición de una magnitud q se repite n veces, calculándose la media aritmética $\overline{q}$ y la desviación estándar experimental s. Se resalta la importancia de realizar el suficiente número de repeticiones, o más exactamente, de tener el suficiente número de grados de libertad asociados a la incertidumbre estándar estimada: Incluso si $n = 10$, la duda acerca de la incertidumbre estimada es de 24 %. Si solamente se realizan 3 mediciones, dicha incertidumbre aumenta hasta un 52 %.

Otro ejemplo de evaluación de Tipo A se incluye en el anexo H, donde se demuestra la utilización de la regresión lineal en la calibración de un termómetro. No se incluye una descripción más general sobre el uso de la estimación por mínimos cuadrados en la evaluación de incertidumbres, probablemente debido a que ocasionaría un sustancial incremento de la complejidad de la Guía.

En una evaluación de Tipo B, uno debe apoyarse en la experiencia y la profesionalidad. La Guía aporta varios ejemplos de cómo la información y el grado de credibilidad que poseemos sobre una magnitud pueden representarse mediante distribuciones rectangulares, triangulares o trapezoidales.

En el anexo F de la Guía se incluyen mini-Guías prácticas adicionales para evaluar las componentes de la incertidumbre. Aquí, se describe la estimación de covarianzas y la atribución de incertidumbre a fenómenos tales como la resolución, la histéresis y la precisión aritmética finita.

Determinación de la incertidumbre estándar combinada

Tras la estimación de las incertidumbres de las magnitudes de entrada, puede calcularse la incertidumbre combinada del resultado de la medición. Este proceso se realiza en la forma habitual, aproximado la función

modelo por los términos de primer orden de su desarrollo en serie de Taylor. Tomando la varianza de esta expresión lineal, aparece la conocida expresión cuadrática de la incertidumbre estándar combinada.

Los coeficientes de sensibilidad, iguales a los coeficientes de primer orden del desarrollo en serie de Taylor, pueden obtenerse por diferenciación parcial. En algunos casos, no obstante, puede resultar más apropiado calcular el coeficiente de sensibilidad haciendo variar las magnitudes de entrada, una por una, y anotando los cambios correspondientes en el resultado de medición.

Si el modelo de función es claramente no lineal, los términos de segundo orden del desarrollo en serie de Taylor no serán despreciables comparados con los de primer orden. La **Guía** aporta fórmulas para aplicar en tales casos, pero no considera el hecho de que, en principio, deberían tenerse en cuenta los momentos de orden superior de las magnitudes de entrada. Por simplicidad, tampoco considera las covarianzas entre las magnitudes de entrada, en los términos de segundo orden. Estas simplificaciones pueden justificarse por el hecho de que la propia estimación de la incertidumbre en cualquier caso está sujeta a una incertidumbre relativamente grande.

El mayor inconveniente en esta sección de la **Guía** es que solamente se consideran magnitudes unidimensionales (escalares). Aunque la matriz de covarianzas de una magnitud multidimensional (vector), como la fuerza, puede calcularse aplicando las fórmulas dadas para cada coordenada de la magnitud, el uso del álgebra matricial supone una simplificación significativa .

Determinación de la incertidumbre expandida

Esta es la sección más controvertida de la **Guía**. La incertidumbre expandida se obtiene multiplicando la incertidumbre estándar por un factor de cobertura k. El concepto de incertidumbre expandida se introduce porque deseamos tener una confianza (hasta cierto grado) de que el valor del mensurando es igual al resultado de medición, dentro de la incertidumbre especificada. Si el resultado de medición sigue una distribución normal y la incertidumbre estándar es conocida sin incertidumbre, el uso de $k = 2$ implica que el resultado de medición más/menos la incertidumbre expandida define un intervalo de confianza del 95 % para el valor del mensurando. En realidad, la incertidumbre estándar del resultado no es perfectamente conocida, sino que se estima, estando ella misma sujeta a incertidumbre. Como consecuencia, si se desea tener un nivel de confianza del 95 % , se requiere un factor de cobertura $k > 2$. ¿Cuánto mayor?, depende de la "incertidumbre" de la incertidumbre estimada.

Con objeto de calcular un intervalo de confianza para el valor del mensurando , debemos conocer la distribución del resultado de medición, así como la distribución de la incertidumbre estimada. Si el resultado sigue una distribución normal y la incertidumbre es proporcional a una distribución , Chi-cuadrado de Pearson con ν grados de libertad, entonces el factor de cobertura que proporciona un intervalo de confianza para un determinado nivel viene dado por una distribución t de Student con ν grados de libertad.

Basado en lo anterior, la **Guía** recomienda que si se requiere un intervalo de confianza, los grados efectivos de libertad ν_{ef} de la incertidumbre estimada se calculen utilizando la fórmula de Welch-Satterhwaite, bien conocida por los estadísticos. El factor de cobertura debe determinarse entonces utilizando una disttibución t de Student, con ν_{ef} grados de libertad.

El cálculo de los grados de libertad efectivos añade complejidad a la estimación de la incertidumbre. Primeramente deben determinarse los grados (efectivos) de las magnitudes de entrada. Posteriormente, deben calcularse los grados de libertad efectivos de la incertidumbre estándar combinada, utilizando la fórmula de Wech-Satterhwaite. La **Guía** no aclara cómo atribuir grados de libertad efectivo a componentes de incertidumbre procedentes de términos de segundo orden del desarrollo en serie de Taylor de la función del modelo. Tampoco describe cómo las covarianzas entre las componentes de incertidumbre pueden modificar la fórmula de Welch-Satterhwaite. No obstante, estas dificultades pueden superarse y no deben desanimar a nadie a utilizar el concepto de grados de libertad efectivos.

Un aspecto interesante de los grados de libertad efectivos es que abren nuevas posibilidades no solo en el cálculo de intervalos de confianza, sino también a la hora de verificar la validez de hipótesis diferentes, utilizando los conocidos estadísticos de la distribución F (de Snedecor).

Expresión de la incertidumbre

En esta sección se recomiendan distintas formas para expresar el resultado de una medición. Como regla general, la información dada debe permitir al lector conocer claramente el resultado de medición, la incertidumbre estándar estimada del resultado, y los grados de libertad efectivos asociados a dicha incertidumbre.

Resumen del procedimiento para la evaluación y expresión de la incertidumbre

Esta sección presenta en una única página, y paso a paso, un procedimiento para evaluar y expresar la incertidumbre, con referencias a otras secciones de la **Guía**, siempre que se considera necesario.

Conclusión

La **Guía** debe verse como la base para la estimación de la incertidumbre de medición.

La **Guía** puede complementarse con técnicas más sofisticadas para la evaluación de Tipo A de las incertidumbres, tales como la estimación por mínimos cuadrados, tanto lineal como no lineal. Con objeto de hacer más fácil la estimación de la incertidumbre, sería convenientes desarrollar programas específicos de computadora basándose en modelos específicos de medición, valores específicos de la magnitud de entrada, sus incertidumbres estándar y sus grados de libertad (efectivos) asociados, el programa debería ser capaz de obtener el resultado de una medición, su incertidumbre estándar y los grados de libertad asociados.

Para resaltar el hecho de que la estimación de la incertidumbre no es en muchos casos tan simple como uno desearía, concluimos con un párrafo perteneciente a la propia **Guía**:

"A pesar de que esta **Guía** proporciona un marco de trabajo para la evaluación de la incertidumbre, ésta no puede nunca sustituir al pensamiento crítico , la honradez intelectual, y la capacidad profesional, dado que la evaluación no es ni una tarea preestablecida ni algo puramente matemático, sino que depende del conocimiento, el análisis crítico y la integridad de quienes contribuyen al establecimiento de dicho valor".

Prefacio

En 1977, al reconocerse la falta de consenso alrededor de la expresión de incertidumbres en las mediciones, la más alta autoridad en metrología en el mundo, el Comité International des Poids et Mesures (CIPM) sugirió al Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) que abordara el problema conjuntamente con los laboratorios nacionales y que hiciera una recomendación.

El BIPM preparó un cuestionario detallado el cual cubría los temas involucrados y lo hizo llegar a 32 laboratorios nacionales de metrología interesados en el tema (y, para información, a cinco organizaciones internacionales). A principios de 1979 se recibieron las respuestas de 21 laboratorios [1]. Casi todos estaban de acuerdo en que era importante contar con un procedimiento aceptado internacionalmente para expresar las incertidumbres en mediciones y para combinar las componentes individuales de la incertidumbre en una única incertidumbre total. Pero, no se alcanzó un consenso acerca del método que debía ser utilizado. El BIPM convocó, entonces, a una reunión con el propósito de diseñar un procedimiento uniforme y mayoritariamente aceptable para la especificación de las incertidumbres, al cual asistieron expertos de 11 laboratorios nacionales. Este Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres generó la Recomendación INC-1 (1980), Expresión de las Incertidumbres Experimentales (2). El CIPM aprobó la recomendación en 1981 [3] y la reconfirmó en 1986 (4).

La tarea de desarrollar una guía detallada basada en la Recomendación del Grupo de Trabajo (que es un bosquejo general más que una receta detallada) fue delegada por el CIPM a la International Organization for Standarization (ISO), puesto que la ISO está más al tanto de las necesidades que surgen del amplio espectro de intereses de la industria y el comercio.

La responsabilidad fue asignada al Grupo Técnico Consultivo en Metrología (TAG 4) dado que una de sus tareas es coordinar el desarrollo de guías en tópicos de la medición que son de interés común, tanto para ISO, como para las seis organizaciones que colaboran con ISO en el trabajo del TAG 4. Dichas organizaciones son:

la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), el organismo que, al igual que la ISO, se dedica a la normalización a nivel mundial; el CIPM y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML), que son las dos organizaciones de metrología a nivel mundial; la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC) y la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP), las dos uniones internacionales que representan a las comunidades química y física, respectivamente; y la Federación Internacional de Química Clínica (IFCC).

El TAG 4 a su vez estableció el Grupo de Trabajo 3 (ISO/TAG 4/WG 3) compuestos por expertos nombrados por BIPM, IEC, ISO, y OIML y nombrados por el Presidente del TAG 4. A este grupo se le asignaron los siguientes términos de referencia:

— Desarrollar un documento guía basado en la Recomendación del Grupo de Trabajo del BIPM sobre la Expresión de Incertidumbres que proporcione reglas acerca de la expresión de incertidumbres en la medición para ser usado en normalización, calibración, en la acreditación de laboratorios y en los servicios de metrología;

El propósito de dicha guía es proporcionar información completa acerca de cómo abordar la expresión de incertidumbres, y proporcionar una base para la comparación internacional de los resultados de las mediciones.

0. Introducción

0.1 Al expresar el resultado de una medición de una magnitud física es obligatorio proporcionar alguna indicación cuantitativa de la calidad del resultado, de manera tal que el usuario pueda apreciar su confiabilidad. Sin esta indicación, los resultados de las mediciones no pueden ser comparados, ni entre ellas mismas ni con respecto a valores de referencia dados en una especificación o norma. Por lo tanto es necesario que exista un procedimiento de fácil comprensión y uso y aceptado de manera general para caracterizar la calidad del resultado de una medición, esto es, para evaluar y expresar su incertidumbre.

0.2 El concepto de *incertidumbre* como un atributo cuantificable es relativamente nuevo en la historia de la medición, a pesar de que los conceptos de error y análisis de errores han formado parte desde hace mucho tiempo de la práctica de la ciencia de la medición o metrología. Actualmente se acepta de manera general que aún cuando se hayan considerado todas las componentes, conocidas o supuestas, del error y se haya aplicado las correcciones, aún existe una incertidumbre acerca de la confiabilidad del resultado expresado, esto es una duda acerca de qué tan bien representa el resultado de la medida al valor de la magnitud que está siendo medida.

0.3 De la misma manera que el uso casi universal del Sistema Internacional de unidades (SI) ha propiciado la coherencia a todas las mediciones científicas y tecnológicas, un consenso mundial acerca de la evaluación y la expresión de la incertidumbre en las mediciones permitiría dar significado a una gran variedad de resultados de medición en la ciencia, ingeniería, comercio, industria y reglamentación, haciéndolas entendibles de manera inmediata y posibilitando que sean propiamente interpretadas. En esta era que vivimos del mercado global, es imperativo que el método de evaluación y expresión de la incertidumbre sea uniforme en todo el mundo, de tal modo que las mediciones realizadas en diferentes países puedan ser comparadas fácilmente.

0.4 El método ideal para evaluar y expresar la incertidumbre del resultado de una medición debe ser *universal*: el método debe ser aplicable a cualquier tipo de mediciones y a cualquier tipo de datos utilizados en las mediciones.

La *magnitud* utilizada para expresar la incertidumbre debe ser:

— Internamente consistente: debe poder obtenerse directamente a partir de los componentes que contribuyen a ella, asimismo, debe ser independiente de la forma en que dichas componentes son agrupadas y del método en que éstas se descomponen en subcomponentes.

— transferible: debe ser posible utilizar directamente la incertidumbre evaluada para un resultado como una componente al evaluar la incertidumbre de otra medición en la que interviene el primer resultado.

Además, en muchas aplicaciones industriales y comerciales, así como en las áreas de salud y seguridad, frecuentemente es necesario proporcionar un intervalo, centrado en el resultado de la medición que contenga una fracción considerable de la distribución de valores que pueden ser razonablemente atribuidos a la magnitud que se está midiendo. Así, el método ideal para evaluar y expresar la incertidumbre en la medición debe ser capaz de proporcionar, directamente, tal tipo de intervalo, en particular, uno con una probabilidad de cobertura o nivel de confianza que corresponda de forma realista con lo requerido.

0.5 Esta *Guía* esta basada en la Recomendación INC-1 (1980) (2) del Grupo de Trabajo sobre Expresión de Incertidumbres, convocado por el BIPM en respuesta a una petición del CIPM (véase el Prefacio). Esta metodología cuya satisfacción se analiza en el Anexo E satisface todos los requisitos descritos arriba. Este no es el caso para la mayoría de los métodos usados comúnmente. La recomendación INC-1 (1980) fue aprobada y ratificada por el CIPM en sus propias Recomendaciones 1 (CI-1981) [3] y 1 (CI-1986) [4]; la traducción al español de tales Recomendaciones del CIPM se incluyen en el ,Anexo A (véase A.2 y A.3 , respectivamente). Dado que la Recomendación INC-1 (1980) es la base para este documento, su traducción al español se muestra en 0.7 y el texto en francés, que es el legalmente autorizado, se reproduce en A.1.

0.6 Un sumario sucinto del procedimiento recomendado en este documento guía para evaluar y expresar las incertidumbres en la medición se da en el capítulo 8. En el anexo H se presentan varios ejemplos detalladamente,. En otros anexos se tratan los siguientes temas: términos generales utilizados en metrología (anexo B); términos y conceptos estadísticos básicos (anexo C); valor "verdadero", error, e incertidumbre (anexo D); sugerencias prácticas para la evaluación de las componentes de la incertidumbre (anexo F); grados de libertad y niveles de confianza (anexo G); los principales símbolos matemáticos usados en este documento (anexo J); referencias bibliográficas (anexo K). El documento concluye con un índice alfabético.

0.7 Recomendación INC-1 (1980) - Expresión de las incertidumbres experimentales

1. La incertidumbre del resultado de una medición consta, generalmente, de varias componentes que pueden ser agrupadas en dos categorías, dependiendo de la manera en que se estime su valor numérico:

   A. aquellas que se evalúan por métodos estadísticos.
   B. aquellas que se evalúan por otros medios.

   + No siempre existe una correspondencia simple entre las categorías A y B y la clasificación en incertidumbres "aleatorias" y "Sistemáticas", que se usaba anteriormente. La expresión "incertidumbre sistemática" puede conducir a errores de interpretación por lo que debe evitarse.

   + Cualquier informe detallado de la incertidumbre debe constar de una lista completa de las componentes, especificando en cada caso el método usado para la obtención de su valor numérico.

2. Las componentes de la categoría A se caracterizan por medio de las varianzas estimadas s_i^2 (o las "desviaciones estándar" estimadas s_i) y el número de grados de libertad ν_i. En caso de ser necesario, debe darse el valor de las covarianzas.

3. Las componentes de la categoría B deben ser caracterizados mediante las cantidades u_j^2, las cuales pueden ser consideradas como aproximaciones a las varianzas correspondientes, cuya existencia se supone. Las cantidades u_j^2 pueden ser tratadas como varianzas, y las cantidades u_j como desviaciones estándar. En caso de ser necesario, las covarianzas deben ser tratadas de la misma manera.

4. La incertidumbre combinada debe ser caracterizada mediante el valor numérico que se obtiene al aplicar el método usual para la combinación de varianzas. La incertidumbre combinada y sus componentes deben expresarse en la forma de "desviaciones estándar".

5. Si en aplicaciones particulares, es necesario multiplicar la incertidumbre combinada por un factor con la finalidad de obtener una incertidumbre total, se indicará siempre el factor multiplicador.

1. Campo de Aplicación

1.1 Esta **Guía** establece reglas generales para la evaluación y la expresión de la incertidumbre en la medición, las cuales pueden seguirse en diferentes niveles de exactitud y en muchos campos, desde el taller hasta la investigación fundamental. Por tanto, se pretende que los principios de esta **Guía** sean aplicables a un amplio espectro de mediciones, incluyendo aquellas requeridas para:

- mantener el control de la calidad y el aseguramiento de la calidad en la producción;
- cumplir y hacer cumplir las leyes y reglamentos;
- conducir la investigación básica, e investigación y desarrollo aplicados en ciencia e ingeniería;
- calibración de patrones e instrumentos y realización de ensayos a través de un sistema nacional de mediciones con la finalidad de lograr la trazabilidad a patrones nacionales;
- desarrollar, mantener, y comparar los patrones físicos de referencia nacionales e internacionales, incluyendo los materiales de referencia.

1.2 Esta **Guía** trata, principalmente, de la expresión de la incertidumbre en la medición de una magnitud física bien definida –el mensurando– que puede caracterizarse por un valor esencialmente único. Si el fenómeno de interés puede representarse únicamente como una distribución de valores o es dependiente de uno o más parámetros, tal como el tiempo, entonces, los mensurandos requeridos para la descripción del fenómeno son el conjunto de magnitudes que describen tal distribución o tal dependencia.

1.3 Esta **Guía** se aplica, también, para la evaluación y la expresión de incertidumbre asociadas con el diseño conceptual y el análisis teórico de experimentos, métodos de medición, y componentes y sistemas complejos. Dado que el resultado de una medición y su incertidumbre pueden ser conceptuales y basados enteramente en datos hipotéticos, entonces el término "resultado de una medición" según se usa en esta **Guía** debe interpretarse en este amplio contexto.

1.4 Esta **Guía** proporciona reglas generales para evaluar y expresar la incertidumbre, en la medición, más que dar instrucciones técnicas detalladas y específicas. Además en ella no se discute cómo la incertidumbre del resultado de una medición particular, una vez evaluada, puede ser utilizada para diferentes propósitos, por ejemplo, para deducir conclusiones acerca de la compatibilidad de ese resultado particular con algunos otros similares, para establecer los límites de tolerancia en un proceso de fabricación, o para decidir si un cierto curso de acción, puede ser seguido sin riesgos. En consecuencia puede ser necesario desarrollar normas particulares, basadas en esta **Guía**, para enfrentar los problemas particulares de los campos específicos de medición o para tratar los varios usos de las expresiones cuantitativas de la incertidumbre.

Estas normas pueden ser versiones simplificadas de la presente **Guía** pero deben incluir el grado de detalle apropiado al nivel de exactitud y complejidad de las mediciones y usos a que se destinan.

NOTA

Pueden existir situaciones en las que se considere que el concepto de incertidumbre de medición no es totalmente aplicable como en el caso en que se determina la precisión de un método de ensayo (véase la referencia (5) por ejemplo).

2. Definiciones

2.1 Términos metrológicos generales

En el Anexo B se da la definición de algunos términos generales de metrología relevantes a esta **Guía**, tales como "magnitud medible", "mensurando" y "error de medición". Estas definiciones se han tomado del *Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de Metrología* (abreviado como VIM) (6). Adicionalmente, en el anexo C se dan las definiciones de algunos términos estadísticos básicos tomados principalmente de la Norma Internacional ISO 3534-1 (7). A partir del Capítulo 3 estos términos metrológicos o estadísticos (o algún término íntimamente relacionado) se imprimen en letras negritas cuando se utilizan por primera vez en el texto y entre paréntesis se da el número de la sección en la cual se definen.

Debido a su importancia en esta **Guía**, la definición del término metrológico general "incertidumbre de medición" se da en el anexo B y en 2.2.3. En los apartados 2.3.1 a 2.3.6 se dan las definiciones de los términos específicos más importantes para esta **Guía**. En todas estos apartados y en los anexos B y C, el encerrar ciertas palabras entre paréntesis significa que pueden omitirse si esto no causa confusión.

2.2 El término "incertidumbre"

El concepto de incertidumbre se discute adicionalmente en el Capítulo 3 y en el anexo D.

2.2.1 La palabra "incertidumbre" significa duda, y por tanto, en su sentido más amplio "incertidumbre de medición" significa duda sobre la validez del resultado de una medición. Debido a la falta de palabras diferentes para este concepto general de incertidumbre y para las magnitudes específicas

que suministran las medidas cuantitativas de dicho concepto, por ejemplo la desviación estándar, entonces es necesario usar la palabra "incertidumbre" en estos dos sentidos diferentes.

2.2.2 En esta **Guía**, la palabra "incertidumbre" sin adjetivos se refiere tanto al concepto general de incertidumbre como a cualquier otra o a todas las medidas cuantitativas de ese concepto. Cuando se trate de una medida específica se deben utilizar los adjetivos apropiados.

2.2.3 La definición formal del término "incertidumbre de medición" que se ha desarrollado para utilizarse en esta **Guía** y adoptada por el VIM (6) (VIM párrafo 3.9) es la siguiente: **incertidumbre (de medición)** parámetro, asociado con el resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían atribuirse razonablemente al mensurando.

NOTAS

1. *El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación estándar (o un múltiplo de ésta), o el semi-ancho de un intervalo que tiene un nivel de confianza determinado.*

2. *La incertidumbre de medición comprende en general varias componentes. Algunas de estas componentes pueden ser evaluadas a partir de la distribución estadística de los resultados de una serie de mediciones y puede caracterizarse por desviaciones estándar experimentales. Las otras componentes, que también pueden caracterizarse utilizando desviaciones estándar, se evalúan asumiendo distribuciones de probabilidad basadas en la experiencia adquirida o en otras informaciones.*

3. *Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de incertidumbre, incluyendo las que provienen de efectos sistemáticos, tales como los componentes asociados con correcciones y a los patrones de referencia, contribuyen a la dispersión.*

2.2.4 La definición de incertidumbre de medición dada en 2.2.3 es una definición operacional que se enfoca en el resultado de la medición y su incertidumbre evaluada. Sin embargo, ésta no es inconsistente con otros conceptos de incertidumbre de medición, tales como:

– una medida del posible error en el valor estimado del mensurando proporcionado como resultado de una medición.

– una estimación que caracteriza el intervalo de valores dentro del cual se halla el valor verdadero de un mensurando (VIM, Primera Edición, 1984, párrafo 3.09).

Aunque estos dos conceptos tradicionales son válidos como ideales, ellos se enfocan sobre magnitudes *desconocidas*: el "error" del resultado de una medición y el "valor verdadero" del

mensurando (en contraste con sus valores estimados), respectivamente. No obstante, cualquiera que sea el *concepto* de incertidumbre que se adopte, una componente de incertidumbre siempre se evalúa usando los mismos datos e información relacionada. (véase también E.5.)

2.3 Términos específicos para esta Guía

En general, los términos que son específicos a esta **Guía**, se definen cuando se presentan por primera vez en el texto. Sin embargo, las definiciones de los términos más importantes se dan aquí por facilidad:

NOTA

Una discusión más a fondo relacionada con estos términos, puede encontrarse como se indica a continuación: para 2.3.2 véase 3.3.3 y 4.2; para 2.3.3 véase 3.3.3 y 4.3; para 2.3.4, véase el Capítulo 5 y las ecuaciones (10) y (13) y para 2.3.5 y 2.3.6 véase el Capítulo 6 .

2.3.1 Incertidumbre estándar

Incertidumbre del resultado de una medición expresada como una desviación estándar

2.3.2 Evaluación de Tipo A (de incertidumbre)

Método para evaluar la incertidumbre mediante el análisis estadístico de series de observaciones

2.3.3 Evaluación de Tipo B (de incertidumbre)

Método para evaluar la incertidumbre por medios distintos al análisis estadístico de series de observaciones

2.3.4 Incertidumbre estándar combinada

Incertidumbre estándar del resultado de una medición, cuando el resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, siendo estos términos las varianzas y covarianzas de dichas magnitudes, ponderadas de acuerdo a cómo varía el resultado de la medición por cambios respectivos en estas magnitudes.

2.3.5 Incertidumbre expandida

Parámetro que define un intervalo en torno al resultado de una medición, tal que en dicho intervalo se espera encontrar una fracción suficientemente grande de la distribución de valores que podrían atribuirse razonablemente al mensurando.

NOTAS

1. *La fracción puede considerarse como la probabilidad de cobertura o el nivel de confianza del intervalo.*
2. *Asociar un nivel específico de confianza con el intervalo definido por la incertidumbre expandida, requiere de suposiciones explícitas o implícitas que tomen en consideración la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de la medición y su incertidumbre estándar combinada. El nivel de confianza que puede atribuirse a este intervalo puede conocerse únicamente hasta el punto en el puedan justificarse tales suposiciones.*
3. *A la incertidumbre expandida se le denomina incertidumbre total en el párrafo 5 de la Recomendación INC-1 (1980).*

2.3.6 Factor de cobertura

Factor numérico usado como multiplicador de la incertidumbre estándar combinada con el propósito de obtener la incertidumbre expandida.

NOTA

El factor de cobertura, k, toma valores típicamente en el intervalo de 2 a 3.

3. Conceptos Básicos

Una discusión adicional de los conceptos básicos enfocada en las ideas de valor "verdadero", error e incertidumbre incluyendo ilustraciones gráficas de estos conceptos puede encontrarse en el anexo D y en el anexo E, el cual explora la motivación y la base estadística para la recomendación INC-1(1980) en la cual esta **Guía** se basa. El anexo J es un glosario de los principales símbolos matemáticos usados a lo largo de la **Guía**.

3.1 Medición

3.1.1 El objetivo de una **medición** (B.2.5) es determinar el **valor** (B.2.2) del **mensurando** (B.2.9), esto es, el valor de la **magnitud particular** (B.2.1, nota 1) a medirse. Por tanto una medición comienza con una especificación apropiada del mensurando, el **método de medición** (B.2.7), y el **procedimiento de medición** (B.2.8).

NOTA

*El término "valor verdadero" (véase anexo D) no se usa en esta **Guía** por las razones dadas en D.3.5; los términos "valor de un mensurando" (o de una magnitud) y "valor verdadero de un mensurando" (o de una magnitud) son vistos como equivalentes.*

3.1.2 En general, el **resultado de una medición** (B.2.11) sólo es una aproximación o **estimación** (C.2.26) del valor del mensurando y entonces es completo sólo cuando va acompañado por una declaración de la **incertidumbre** (B.2.18) de esa estimación.

3.1.3 En la práctica, la especificación o definición requerida del mensurando depende de la **exactitud de la medición** requerida (B.2.14). Por lo tanto el mensurando debe definirse lo más completamente posible respecto a la exactitud requerida de modo que para todos los efectos prácticos asociados con la medición, su valor sea único. En este sentido es en el que se utiliza la expresión "valor del mensurando" en esta **Guía**.

EJEMPLO

Si la longitud de una barra de acero de valor nominal un metro va a determinarse con exactitud micrométrica, esta especificación debe incluir la temperatura y presión a las que se define la longitud. Entonces el mensurando debe ser especificado como, por ejemplo, la longitud de una barra a 25,00 °C y 101 325 Pa (más cualquier otro parámetro que se considere necesario, así como la manera en que la barra debe estar sostenida). No obstante, si la longitud va a determinarse para una exactitud milimétrica, esta especificación no debe requerir una definición de temperatura o presión, ni el valor de ningún otro parámetro.

NOTA

Una definición incompleta del mensurando puede dar lugar a una componente de incertidumbre tan grande que obligue a incluírla en la evaluación de la incertidumbre del resultado de la medición (véase D.1.1. D. 3.4 y D. 6.2).

3.1.4 En muchos casos, el resultado de una medición se determina a partir de una serie de observaciones obtenidas bajo **condiciones de repetibilidad** (B.2.15, nota 1).

3.1.5 Se asume que las variaciones en las observaciones repetidas son causadas por las variaciones de las **magnitudes de influencia** (B.2.10) que pueden afectar el resultado de la medición. Generalmente es imposible mantener completamente constantes tales magnitudes de influencia.

3.1.6 El modelo matemático de la medición que transforma el conjunto de observaciones repetidas en el resultado de la medición es de importancia crítica porque, además de las observaciones, generalmente incluye varias magnitudes de influencia que son conocidas de una manera inexacta. Esta falta de conocimiento contribuye a la incertidumbre de los resultados de la medición, así como lo hace las variaciones de las observaciones repetidas y cualquier incertidumbre asociada con el modelo matemático en sí mismo.

3.1.7 Esta **Guía** trata al mensurando como un escalar (una magnitud única). La extensión a un conjunto de mensurandos relacionados entre sí determinados simultáneamente en la misma medición requiere reemplazar el mensurando escalar y su **varianza** (C.2.11 , C.2.20, C.3.2) por

un mensurando vectorial y una **matriz de covarianza** (C.3.5). Tal reemplazo es considerado sólo en algunos ejemplos en esta **Guía** (véase H.2, H.3, H.4).

3.2 Errores, efectos y correcciones

3.2.1 En general, toda medición tiene imperfecciones que dan lugar a un **error** (B.2.19) en el resultado de la medición. Tradicionalmente se ha considerado que el error tiene dos componentes, llamadas: componente **aleatoria** (B.2.21) y componente **sistemática** (B.2.22).

NOTA
El error es un concepto idealizado y como tal no es posible conocerlo exactamente.

3.2.2 Se presume que el error aleatorio es causado por las variaciones impredecibles y estocásticas de naturaleza temporal y espacial de las magnitudes de influencia. Los efectos de estas variaciones, llamados en lo sucesivo efectos aleatorios, causan las variaciones en las observaciones repetidas del mensurando. No es posible compensar el error aleatorio del resultado de una medición, sin embargo puede reducirse tanto como se quiera aumentado el número de observaciones en el límite, cuando el número de observaciones sea infinito, el valor del error aleatorio es cero, es decir su **esperanza** o **valor esperado** (C.2.4. C.3.4) es cero.

NOTAS

1. *La desviación estándar experimental de la media aritmética o promedio de una serie de observaciones, (véase 4.2.3) no es el error aleatorio de la media, aunque se designe así en algunas publicaciones. Por el contrario, es una medida de la incertidumbre de la media debido a los efectos aleatorios. El valor exacto del error en la media que surge a partir de estos efectos no puede ser conocido.*
2. *En esta **Guía** se ha tomado gran cuidado para distinguir entre los términos "error" e "incertidumbre". No son sinónimos, sino conceptos completamente diferentes y no deben confundirse entre sí o ser mal empleados.*

3.2.3 El error sistemático, al igual que como el error aleatorio, no puede eliminarse, pero a menudo puede, también reducirse. Si un error sistemático es causado por un identificado y conocido efecto de una magnitud de influencia sobre el resultado de una medición (de aquí en adelante llamado *efecto sistemático*) entonces el efecto puede cuantificarse y, si es suficientemente significativo frente a la exactitud requerida de la medición, entonces puede aplicarse una **corrección** (B.2.23) o un **factor de corrección** (B. 2.24) para compensarlo. Se supone que después de la corrección, la esperanza o valor esperado del error causado por dicho efecto sistemático es cero.

NOTAS

1. *La incertidumbre de una corrección aplicada al resultado de una medición para compensar un efecto sistemático no es el error sistemático del resultado de una medición, frecuentemente llamado sesgo de la medición, debido a dicho efecto como algunas veces se le llama. Esta es, por el contrario, una medida de la incertidumbre del resultado debido al conocimiento incompleto del valor requerido de la corrección. El error originado por la compensación imperfecta de un efecto sistemático no puede conocerse exactamente. Los términos "error" e "incertidumbre" deben usarse apropiadamente y debe tenerse cuidado para distinguirlos entre sí.*
2. *Al error sistemático frecuentemente en inglés se le ha llamado "bias" y en estadística se lo ha identificado a veces con el "sesgo de la medición".*

3.2.4 Se asume que el resultado de una medición ha sido corregida por todos los efectos sistemáticos *identificados* como significativos tras haber hecho todo lo posible para su identificación.

EJEMPLO

En la determinación de la diferencia de potencial (mensurando) existente en los bornes de una resistencia de alta impedancia se aplica una corrección debida a la impedancia finita del voltímetro usado con la finalidad de reducir el efecto sistemático en el resultado de la medición originado por el efecto de carga del voltímetro. No obstante, los valores de las impedancias del voltímetro y de la resistencia, usados para estimar el valor de la corrección y que se obtienen a partir de otras mediciones, están asimismo afectados de incertidumbres. Estas incertidumbres se usan para evaluar la componente de la incertidumbre en la determinación de la diferencia de potencial, causada por la corrección y, en consecuencia, por el efecto sistemático debido a la impedancia finita del voltímetro.

NOTAS

1. *Frecuentemente los instrumentos y los sistemas de medición se ajustan o calibran usando patrones de medición y materiales de referencia para eliminar efectos sistemáticos; aún así, las incertidumbres asociadas con estos patrones y materiales deben ser tomadas en cuenta.*
2. *Un caso en el que no se aplica una corrección para un efecto sistemático y significativo conocido, se discute en la nota de 6.3.1 y en F.2.4.5.*

3.3 Incertidumbre

3.3.1 La incertidumbre del resultado de una medición refleja la falta de conocimiento exacto del valor del mensurando (véase 2.2). El resultado de una medición después de la corrección por los efectos sistemáticos identificados y conocidos es, aún, sólo una *estimación* del valor del mensurando debido a la presencia de incertidumbres que surgen por los efectos aleatorios y por las imperfectas correcciones de los resultados por efectos sistemáticos.

NOTA

El resultado de una medición (después de la corrección) puede estar tremendamente cercano al valor del mensurando y por tanto tener un error absolutamente despreciable sin que el observador lo sepa y aun así puede tener una gran incertidumbre. Esto ilustra claramente porqué la incertidumbre del resultado de una medición no debe ser confundida con el error residual desconocido.

3.3.2 En la práctica, existen muchas fuentes posibles de incertidumbre en una medición, incluyendo:

a) definición incompleta del mensurando;
b) realización imperfecta de la definición del mensurando;
c) muestreo no representativo – la muestra medida puede no representar al mensurando definido;
d) conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones ambientales sobre las mediciones, o mediciones imperfectas de dichas condiciones ambientales;
e) errores de apreciación del observador en la lectura de instrumentos analógicos; (agudeza visual del observador, paralaje)
f) resolución finita del instrumento o umbral de discriminación finito;
g) valores inexactos de los patrones de medición y materiales de referencia;
h) valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y usados en los algoritmos de procesamiento de datos;
i) aproximaciones y suposiciones incorporadas en el método y procedimiento de medición.
j) variaciones en las observaciones repetidas del mensurando bajo condiciones aparentemente iguales.

Estas fuentes no son necesariamente independientes, y algunas de ellas desde a) hasta i) pueden contribuir a la fuente j). De hecho, un efecto sistemático no identificado no puede ser tomado en cuenta en la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición pero contribuye a su error.

3.3.3 La Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres agrupa a las componentes de incertidumbre en dos categorías, esta clasificación se basa en los métodos de evaluación empleados, a saber: "A" y "B" (veáse 0.7, 2.3.2, y 2.3.3). Estas categorías se aplican a la incertidumbre y no sustituyen a las palabras “aleatorio” y “sistemático". La incertidumbre de una corrección por efecto sistemático conocido puede obtenerse en algunos casos mediante una evaluación de Tipo A, mientras que en otros casos puede obtenerse por una

evaluación de Tipo B , lo mismo puede decirse para una incertidumbre que caracteriza a un efecto aleatorio.

NOTA

En algunas publicaciones las componentes de incertidumbre se clasifican como "aleatorias" y "sistemáticas'" y se asocian con los errores causados por los efectos aleatorios y efectos sistemáticos conocidos, respectivamente. Esta clasificación puede ser ambigua cuando se aplica en forma general. Por ejemplo, una componente "aleatoria" de la incertidumbre en una medición puede ser una componente "sistemática" de la incertidumbre en otra medición en la cual el resultado de la primera medición se usa como magnitud de entrada. El clasificar los métodos para evaluar las componentes de la incertidumbre en vez de las componentes en sí mismas elimina esta ambigüedad. Al mismo tiempo, ello no impide clasificar posteriormente las componentes individuales, obtenidas por ambos métodos, en grupos diseñados para un propósito particular (véase 3.4.3).

3.3.4 El propósito de la clasificación en Tipo A y Tipo B es para indicar las dos diferentes maneras de evaluar las componentes de incertidumbre y es por conveniencia de discusión solamente; la clasificación no significa que exista alguna diferencia en la naturaleza de las componentes que resultan de cada uno de los dos tipos de evaluación. Ambos tipos de evaluación están basados en **distribuciones de probabilidad** (C.2.3), y las componentes de incertidumbre resultantes de cualquier tipo son cuantificadas por varianzas y desviaciones estándar.

3.3.5 La varianza estimada u^2 que caracteriza a una componente de incertidumbre obtenida de una evaluación de Tipo A se calcula a partir de series de observaciones repetidas y es la conocida varianza estimada estadísticamente s^2 (véase 4.2). La **desviación estándar** estimada u (C.2.12, C.2.21 , C.3.3) , raíz cuadrada positiva de u^2, es entonces $u = s$ y por conveniencia se le llama *incertidumbre estándar de Tipo A*. Para una componente de incertidumbre obtenida de una evaluación de Tipo B, la varianza estimada u^2 se evalúa a partir de la información disponible (véase 4.3), y a la desviación estándar estimada u se le llama *incertidumbre estándar de Tipo B.*

Así la incertidumbre estándar de Tipo A se obtiene a partir de una **función de densidad de probabilidad** (C.2.5) deducida de una **distribución de frecuencia** observada (C.2.18), mientras que la incertidumbre estándar de Tipo B se obtiene a partir de una función de densidad de probabilidad *supuesta* basada en el grado de confianza de que un evento pueda ocurrir (a menudo llamada **probabilidad** (C.2.1) subjetiva). Ambas aproximaciones se basan en interpretaciones admitidas de probabilidad.

NOTA

Una evaluación de Tipo B de una componente de incertidumbre generalmente se basa en un conjunto de informaciones dignas de crédito y puede ser más confiable que una evaluación de Tipo A .

3.3.6 La incertidumbre estándar, del resultado de una medición, cuando dicho resultado se obtiene a partir de los valores de otras magnitudes, se llama *incertidumbre estándar combinada* y se denota por u_c. Esta es la desviación estándar estimada asociada con el resultado de medición y es igual a la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada obtenida a partir de todas las componentes de varianza y **covarianza** (C.3.4), cualquiera que sea la forma en que se evalúe, utilizando lo que, en esta **Guía**, se llama la ley de *propagación de incertidumbres* (véase capítulo 5).

3.3.7 Para satisfacer las necesidades de algunas aplicaciones industriales y comerciales, así como los requerimientos en las áreas de salud y seguridad, se calcula una *incertidumbre expandida* U multiplicando la incertidumbre estándar combinada u_c , por un *factor de cobertura k.* El propósito de obtener U es definir un intervalo entorno al resultado de una medición, tal que pueda esperarse que dentro de dicho intervalo exista una fracción suficientemente grande de la distribución de valores que pueden atribuirse razonablemente al mensurando. La elección del factor *k*, el cual usualmente se encuentra en el rango de 2 a 3, se basa en la probabilidad de cobertura o nivel de confianza que se requiere para dicho intervalo (véase Capítulo 6).

NOTA

El factor de cobertura tiene que declararse siempre, de tal manera que la incertidumbre estándar del mensurando pueda recuperarse para usarla en el cálculo de la incertidumbre estándar combinada de otros resultados de las mediciones que pueden depender de esa magnitud.

3.4 Consideraciones prácticas

3.4.1 Si todas las magnitudes de las cuales el resultado de una medición depende, pudieran variarse, entonces su incertidumbre podría evaluarse por métodos estadísticos. Sin embargo, debido a que esto es raramente posible en la práctica por limitaciones de tiempo y recursos, la incertidumbre del resultado de una medición usualmente se evalúa usando un modelo matemático de la medición y la ley de propagación de incertidumbre. Por lo tanto, en la presente **Guía**, está implícita la hipótesis de que a toda medición puede hacérsele corresponder un modelo matemático hasta el grado impuesto por la exactitud requerida de la medición.

3.4.2 Dado que el modelo matemático puede ser incompleto, todas las magnitudes relevantes deberían ser variadas tanto como las condiciones prácticas lo permitan al máximo, para que la evaluación de incertidumbres se base, tanto como sea posible, en datos observados. Siempre que sea factible, deben formar parte del esfuerzo para obtener evaluaciones confiables de incertidumbre, el uso de modelos empíricos de la medición fundamentados en datos cuantitativos acumulados por un largo plazo, y el uso de normativas de verificación y cartas de control que pueden indicar si una medición está bajo control estadístico, deben ser costumbres que formen parte del esfuerzo para obtener evaluaciones confiables de incertidumbre. El modelo matemático debe siempre revisarse cuando los datos observados, incluyendo el resultado de determinaciones independientes del mismo mensurando, demuestren que el modelo es incompleto. Un experimento bien diseñado puede facilitar grandemente evaluaciones confiables de la incertidumbre y es una parte importante del arte de la medición.

3.4.3 Con el fin de decidir si un sistema de medición está funcionando apropiadamente se compara frecuentemente, la variabilidad experimentalmente observada de sus valores de salida, medida por su desviación estándar observada, contra la desviación estándar predicha, obtenida al combinar las diversas componentes de incertidumbre que caracterizan la medición. En estos casos, sólo deben considerarse aquellas componentes (ya sean obtenidas por evaluaciones de Tipo A o de Tipo B) que puedan contribuir a la variabilidad, observada experimentalmente, de los valores de salida.

NOTA

Tal análisis puede facilitarse clasificando todas aquellas componentes que contribuyan a la variabilidad y aquellas que no, en dos grupos separados y apropiadamente identificados.

3.4.4 En algunos casos, la incertidumbre de una corrección por un efecto sistemático no necesita incluirse en la evaluación de la incertidumbre del resultado de medición. Aunque la incertidumbre haya sido evaluada, puede ignorarse si su contribución a la incertidumbre estándar combinada del resultado de medición es insignificante. Incluso si el valor mismo de la corrección es relativamente insignificante en comparación con la incertidumbre estándar combinada, entonces también puede ignorarse la propia corrección.

3.4.5 Ocurre frecuentemente en la práctica, especialmente en el dominio de la metrología legal, que un instrumento de medición sea probado por medio de una comparación contra un patrón de

medición y que las incertidumbres asociadas con el patrón y el procedimiento de comparación sean despreciables en relación a la exactitud requerida para la prueba. Un ejemplo es el uso de un conjunto de patrones de masa bien calibrados para probar la exactitud de una balanza comercial. En estos casos, debido a que las componentes de incertidumbre son suficientemente pequeñas como para ignorarse, entonces se puede considerar que la medición determina el error del instrumento bajo prueba (véase F.2.4.2).

3.4.6 La estimación del valor de un mensurando obtenido del resultado de una medición, algunas veces, se expresa en términos del valor adoptado de un patrón de medición en lugar de usar términos de la unidad relevante del Sistema Internacional de Unidades (SI). En estos casos la incertidumbre atribuida al resultado de medición puede ser significativamente menor que cuando este resultado se expresa en las unidades SI relevantes. (En efecto, el mensurando ha sido redefinido como la razón del valor de la magnitud a medirse respecto al valor adoptado del patrón).

EJEMPLO

Un patrón de tensión eléctrica Zener de alta calidad se calibra por comparación contra una referencia de tensión de efecto Josephson, basándose en el valor convencional de la constante de Josephson recomendado para su uso internacional por el CIPM. La incertidumbre estándar combinada relativa $u_c(V_S)/V_S$ *(véase 5.1.6) de la diferencia de potencial calibrada* V_S *del patrón Zener es* $2x10^{-8}$ *cuando* V_s *se declara en términos del valor convencional, pero* $u_c(V_S)/V_S$*, es* $4x10^{-7}$ *cuando* V_S *se expresa en términos de la unidad* SI *de diferencia de potencial ,* V *, debido a la incertidumbre adicional asociada con el valor* SI *de la constante de Josephson.*

3.4.7 Los descuidos al registrar o analizar los datos pueden producir un significativo error desconocido en el resultado de una medición. Los errores grandes pueden generalmente identificarse mediante una revisión adecuada de los datos; los errores pequeños pueden quedar enmascarados por, o incluso aparecer como, variaciones aleatorias. No se pretende que las mediciones de incertidumbre tomen en cuenta tales confusiones.

3.4.8 Aunque esta **Guía** proporciona un marco de trabajo para evaluar incertidumbres, éste no puede nunca sustituir al pensamiento crítico, la honestidad intelectual, y la capacidad profesional. La evaluación de incertidumbres no es una tarea de rutina ni algo puramente matemático; sino que depende del conocimiento detallado de la naturaleza de los mensurandos y de las mediciones. Por lo tanto, la calidad y utilidad de la incertidumbre indicada en los resultados de una medición dependen en última instancia del grado de conocimiento, análisis crítico e integridad de las personas que contribuyan a la asignación de ese valor.

4. Evaluación de la incertidumbre estándar

En el anexo F pueden encontrarse directrices adicionales, para la evaluación de las componentes de incertidumbre, principalmente de naturaleza práctica

4.1 Modelando la medición

4.1.1 En la mayoría de los casos, el mensurando *Y* no se mide directamente sino que se determina a partir de otras *N* magnitudes X_1 , X_2 , ... X_N , a través de una relación funcional *f* :

$$Y = f(X_1 , X_2 , \ldots X_N) \qquad \ldots(1)$$

NOTAS

1. *Para simplificar la notación en esta* **Guía**, *se utiliza el mismo símbolo para la magnitud física (el mensurando) y para la variable aleatoria (véase 4.2.1) que representa el posible resultado de una observación de esa magnitud. Cuando se establece que* X_i *tiene una distribución de probabilidad particular, el símbolo se usa en ese último sentido; se asume que la magnitud física misma puede caracterizarse por un valor esencialmente único (véase 1.2 y 3.1.3).*

2. *En una serie de observaciones, el k-ésimo valor observado de* X_i *se denota por* $X_{i,k}$ *; por ejemplo, si R denota la resistencia de un resistor, el k-ésimo valor observado de la resistencia se denota por* R_k *.*

3 . *La estimación de* X_i *(estrictamente hablando, de su valor esperado) se denota por* x_i.

EJEMPLO

Si una diferencia de potencial *V* se aplica a las terminales de un resistor dependiente de la temperatura que tiene una resistencia R_o a la temperatura definida t_o y un coeficiente lineal de temperatura α, para la resistencia, entonces la potencia *P* (el mesurando) disipada por el resistor a la temperatura t depende de V, R_0, α y *t* de acuerdo a:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2 / R_0 \; [1 + \alpha (t - t_0)]$$

NOTA

Otros métodos para medición de la potencia P podrían ser modelados con expresiones matemáticas diferentes.

4.1.2 Las magnitudes de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_N$, de las cuales depende el resultado de la medición *Y*, pueden visualizarse a su vez como mensurandos y depender de otras magnitudes, incluyendo correcciones y factores de corrección por efectos sistemáticos, todo ello dando lugar a complicadas relaciones funcionales *f* que incluso nunca pudieran expresarse explícitamente. Adicionalmente, *f* puede determinarse experimentalmente (véase 5.1.4) o existir sólo como un algoritmo que deba evaluarse numéricamente. La función *f*, como aparece en esta **Guía** debe interpretarse en este amplio sentido, es decir, como aquella función que contiene cada magnitud, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección, que puedan contribuir con componentes significativos de incertidumbre al resultado de medición.

Por lo tanto, si los datos indican que *f* no modela la medición al grado impuesto por la exactitud requerida del resultado de medición, entonces se deben incluir magnitudes de entrada adicionales en *f* para eliminar el problema (véase 3.4.2). Esto puede requerir la introducción de una magnitud entrada que sirva para reflejar el insuficiente conocimiento de un fenómeno que afecta al mensurando. En el ejemplo de 4.1.1, se podrían necesitar magnitudes de entrada adicionales para tomar en cuenta a una distribución conocida, no uniforme, de temperatura a través del resistor, un posible coeficiente de temperatura para la resistencia no lineal, o una posible dependencia de la resistencia respecto de la presión barométrica.

NOTA

Sin embargo, la ecuación (1) puede ser tan elemental como $Y = X_1 - X_2$. *Esta expresión modela, por ejemplo, la comparación de dos determinaciones de la misma magnitud* X.

4.1.3 El conjunto de magnitudes de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$ pueden dividirse en las siguientes categorías:

– magnitudes cuyos valores *e incertidumbres* se determinan directamente en la medición en curso. Estos valores e incertidumbres pueden obtenerse , por ejemplo, a partir de una sola observación, observaciones repetidas o el juicio basado en la experiencia, y pueden involucrar la determinación de correcciones en la lectura de los instrumentos y correcciones debidas a la presencia de magnitudes cuya influencia deba tomarse en cuenta, tales como la temperatura ambiente, la presión barométrica y la humedad;

– magnitudes cuyos valores *e incertidumbres* se incorporan a la medición provenientes de fuentes externas, tales como magnitudes asociadas con patrones de medición calibrados, materiales de referencia certificados y datos de referencia obtenidos de manuales (handbooks).

4.1.4 Una estimación del mensurando *Y*, denotada como *y*, se obtiene de la ecuación (1) usando las estimaciones de entrada $x_1\ x_2, \ldots x_N$ para los valores de las N magnitudes $X_1, X_2, .., X_N$. Por lo tanto, la *estimación de salida* y que es el resultado de la medición, está dada por:

$$y = f(x_1\ , x_2 \ldots .\ x_N) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

NOTA

En algunos casos la estimación y puede obtenerse de:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\,(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots X_{N,k})$$

Esto es, *y* se toma como la media aritmética o promedio (véase 4.2.l) de *n* determinaciones independientes Y_k de Y, cada una de éstas teniendo la misma incertidumbre y estando basadas en un grupo *completo* de valores observados de la N magnitudes de entrada X_i obtenidos al *mismo tiempo*. Esta forma de promediar, en lugar de $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$, donde $\overline{X}_i = (\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}) / n$ es la media aritmética de las observaciones individuales $X_{i,k}$, puede ser preferible cuando *f* es una función *no lineal* de las magnitudes de entrada $X_1, X_2, ..X_N$; pero las dos aproximaciones son idénticas si *f* es una función lineal de las X_i (véase H.2 y H.4).

4.1.5 La desviación estándar estimada asociada con la estimación de salida o resultado de la medición y se denomina *incertidumbre estándar combinada* y se denota por $u_c(y)$. Se determina a partir la desviación estándar estimada asociada con cada estimación de entrada x_i, llamada *incertidumbre estándar* y denotada por $u(x_i)$ (véase 3.3.5 y 3.3.6).

4.1.6 Cada estimación de entrada x_i , y su incertidumbre estándar asociada $u(x_i)$ se obtiene a partir de una distribución de los posibles valores de la magnitud de entrada X_i. Esta distribución de probabilidad puede estar basada en frecuencia de aparición, es decir, basada en una serie de observaciones $X_{i,k}$, de X_i , o puede ser una distribución asumida *a priori*. Las evaluaciones de Tipo A de las componentes de la incertidumbre estándar están basadas en distribuciones de frecuencia observadas, mientras que las evaluaciones de tipo B se basan en distribuciones asumidas *a priori*. Se debe reconocer que en ambos casos las distribuciones son modelos que representan el grado de nuestro conocimiento.

4.2. Evaluación de Tipo A de incertidumbre estándar

4.2.1 En la mayoría de los casos, la mejor estimación disponible de la esperanza o valor esperado μ_q de una magnitud q que varía aleatoriamente [**una variable aleatoria** (C.2.2)] , y de la cual se han obtenido n observaciones independientes q_k bajo condiciones de **repetibilidad** (véase B.2.15), es la **media aritmética** o **promedio** $\bar{q}$ (C.2.19) de las n observaciones:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \qquad \text{.....(3)}$$

Por tanto, para una magnitud de entrada X_i estimada a partir de n observaciones repetidas independientes $X_{i,k}$, la media aritmética $\bar{X}_i$ obtenida de la ecuación (3) se usa como la estimación de entrada x_i, en la ecuación (2) para determinar el resultado de la medición y; esto es, $x_i = \bar{X}_i$ Aquellos estimados de entrada no evaluados a partir de observaciones repetidas deben obtenerse por otros métodos, tales como aquellos que se indican en la segunda categoría de 4.1.3.

4.2.2 Las observaciones individuales q_k difieren en valor debido a las variaciones aleatorias de las magnitudes de influencia, es decir, debido a efectos aleatorios (véase 3.2.2). La varianza experimental de las observaciones, la cual estima la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de q, está dada por:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2 \qquad \text{.....(4)}$$

Esta estimación de la varianza y su raíz cuadrada positiva $s(q_k)$ denominada **desviación estándar experimental** (B.2.17), caracterizan la variabilidad de los valores observados q_k o más específicamente, su dispersión alrededor de la media $\bar{q}$.

4.2.3 La mejor estimación de $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$, la varianza de la media, está dada por:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \qquad \text{.....(5)}$$

La varianza experimental de la media $s^2(\bar{q})$ y la **desviación estándar experimental** de la media $s(\bar{q})$ (B.2.17 , nota 2), que es igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\bar{q})$, cuantifican qué tan bien $\bar{q}$ estima el valor esperado μ_q de q , y cualquiera de ellas puede usarse como una medida de la incertidumbre de $\bar{q}$.

Por lo tanto, para una magnitud de entrada X_i determinada a partir de n observaciones independientes repetidas $X_{i,k}$, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de su estimación $x_i = \bar{X}$, es $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$, donde $s^2(\bar{X}_i)$ se calcula de acuerdo a la ecuación (5). Por conveniencia, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ y $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ son a veces llamadas *varianza de Tipo A* e *incertidumbre estándar de Tipo A*, respectivamente.

NOTAS

1. *El número de observaciones n debe ser suficientemente grande para asegurar que q es una estimación confiable del valor esperado μ_q ,de la variable aleatoria q y que $s^2(\bar{q})$ es una estimación confiable de la varianza $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ (véase la nota en 4.3.2). La diferencia entre $s^2(\bar{q})$ y $\sigma^2(\bar{q})$ debe considerase cuando se construyen intervalos de confianza (véase 6.2.2). En este caso, si la distribución de probabilidad de q es una distribución normal (véase 4.3.4), la diferencia se toma en cuenta mediante la distribución t de Student (véase G.3.2).*

2. *A pesar de que la varianza $s^2(\bar{q})$ es el parámetro más fundamental asociado a la dispersión, la desviación estándar $s(\bar{q})$ es más conveniente en la práctica debido a que tiene las mismas dimensiones que q y se comprende más fácilmente que la varianza.*

4.2.4 Para una medición bien caracterizada bajo control estadístico, pudiera disponerse de una estimación combinada o ponderada de la varianza s^2_p (o una desviación estándar experimental ponderada s_p) que caracterizase a la medición. En tales casos, cuando el valor de un mensurando q se determina a partir de n observaciones independientes, la varianza experimental de la media aritmética q de las observaciones está mejor estimada por s^2_p/n que por $s^2(\bar{q})/n$, siendo la incertidumbre estándar $u = s_p/\sqrt{n}$. (véase también la nota de H.3.6.)

4.2.5 Frecuentemente una estimación x_i de una magnitud de entrada X_i se obtiene a partir de una curva que ha sido ajustada a **datos experimentales** por el método de mínimos cuadrados. Las varianzas estimadas y las incertidumbres estándar resultantes de los parámetros ajustados que caracterizan la curva y de cualquier punto predicho por tal ajuste puede calcularse comúnmente usando procedimientos estadísticos bien conocidos (véase H.3 y referencia [8].

4.2.6 Los **grados de libertad** (C.2.31) ν_i de $u(x_i)$ (véase G.3), que son $n-1$ en el caso simple en que $x_i = \bar{X}_i$ y $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ y que se calculan a partir de n observaciones independientes como en 4.2.1 y 4.2.3, deben siempre expresarse cuando se documentan las evaluaciones de tipo A de las componentes de incertidumbre.

4.2.7 Si las variaciones aleatorias en las observaciones de una magnitud de entrada están correlacionadas, por ejemplo, en el tiempo, la media y la desviación estándar experimental de la media como se dan en 4.2.1 y 4.2.3 pudieran ser **estimadores** (C.2.25) inapropiados de los **estadígrafos** deseados (C.2.23). En tales casos, las observaciones deben analizarse por medios estadísticos especialmente diseñados para tratar una serie de mediciones correlacionadas que varían aleatoriarnente.

NOTA

Estos métodos especializados se usan para tratar mediciones de patrones de frecuencia. Sin embargo, es posible que conforme se va de mediciones en el corto plazo a mediciones a largo plazo de otras magnitudes metrológicas, la suposición de variaciones aleatorias no correlacionadas pudiera ya no ser válida y los métodos especializados pudieran entonces ser usados también para tratar estas mediciones. (véase referencia [9], por ejemplo, para una discusión detallada de la varianza de Allan).

4.2.8 La discusión de la evaluación de Tipo A de la incertidumbre estándar en los párrafos 4.2.1 a 4.2.7 no pretende ser exhaustiva; existen muchas situaciones, algunas muy complejas, que

pueden tratarse por métodos estadísticos. Un ejemplo importante es el uso de diseños de calibración, que se basan frecuentemente en el método de mínimos cuadrados, usados para evaluar las incertidumbres que surgen de las variaciones aleatorias a corto y largo plazo en los resultados de las comparaciones de artefactos materiales de valor desconocido, tales como bloques patrón y patrones de masa, contra patrones de referencia de valores conocidos. En estas situaciones de mediciones comparativamente simples, las componentes de incertidumbre pueden evaluarse, frecuentemente, mediante el análisis estadístico de los datos obtenidos a partir de diseños que consisten de secuencias anidadas de mediciones del mensurando, utilizando varios valores diferentes de las magnitudes de las cuales depende. Este procedimiento es conocido como análisis de varianza ANOVA (véase H.5).

NOTA

En los niveles más bajos de la cadena de calibración, en donde frecuentemente se supone que los patrones de referencia se conocen exactamente debido a que han sido calibrados por un laboratorio nacional o primario, la incertidumbre del resultado de una calibración puede ser simplemente una incertidumbre estándar de tipo A, evaluada mediante una desviación estándar ponderada que caracterice las mediciones.

4.3 Evaluación de Tipo B de incertidumbre estándar

4.3.1 Para una estimación x_i de una magnitud de entrada X_i que no se obtuvo de observaciones repetidas, la varianza estimada asociada $u^2(x_i)$ o la incertidumbre estándar $u(x_i)$ se evalúan mediante juicios y criterios científicos basados en toda la información disponible sobre la variabilidad de X_i. Esta información puede incluir:

- datos de mediciones anteriores;
- experiencia con, o conocimiento general de, las características y el comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos relevantes;
- especificaciones de los fabricantes;
- datos obtenidos tanto de los certificados de calibración y otros tipos de certificados;
- incertidumbres asignadas a datos de referencia tomados de manuales.

Por conveniencia, $u^2(x_i)$ y $u(x_i)$, evaluadas de este modo, son algunas veces llamadas *varianza de Tipo B* e *incertidumbre estándar de Tipo B*, respectivamente.

NOTA

Cuando x_i se obtiene a partir de una distribución asumida a priori, la varianza asociada es denotada, apropiadamente, como $u^2(X_i)$, pero, por simplicidad, en esta **Guía** *se usan $u^2(x_i)$ y $u(x_i)$.*

4.3.2 El uso adecuado de la información disponible para una evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar requiere de una visión basada en la experiencia y el conocimiento general, y es una habilidad que puede aprenderse con la práctica. Debe reconocerse que una evaluación de incertidumbre estándar de Tipo B puede ser tan confiable como una evaluación de Tipo A, especialmente en una situación en donde una evaluación de tipo A se base en un número comparativamente pequeño de observaciones estadísticamente independientes.

NOTA

Si la distribución de probabilidad de q en la nota 1 de 4.2.3 es normal entonces $\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma\,(\bar{q})$ la desviación estándar de $s(\bar{q})$ relativa a $\sigma\,(\bar{q})$ es aproximadamente $[2(n-1)]^{-1/2}$. Entonces tomando $\sigma\,[s(\bar{q})]$ como la incertidumbre de $s(\bar{q})$, para n = 10 observaciones la incertidumbre relativa en $s(\bar{q})$ es 24 por ciento, mientras que para n = 50 observaciones ésta es 10 por ciento. (En la tabla E. 1 del anexo E se dan valores adicionales).

4.3.3 Si la estimación x_i se toma de una especificación del fabricante, de un certificado de calibración, manual u otra fuente y su incertidumbre asignada se establece como un múltiplo particular de una desviación estándar, entonces la incertidumbre estándar $u\,(x_i)$ es simplemente el valor asignado dividido por el multiplicador, y la varianza estimada $u^2(x_i)$ es el cuadrado de dicho cociente.

EJEMPLO

Un certificado de calibración establece que la masa m_s de un patrón de masa hecho de acerco inoxidable, de valor nominal un kilogramo es 1 000,000 325 g y que "la incertidumbre de este valor es 240 μg al nivel de tres desviaciones estándar". La incertidumbre estándar del patrón de masa es entonces simplemente $u(m_s) = (240\,\mu g)/3 = 80\,\mu g$. Esto corresponde a una incertidumbre estándar relativa $u(m_s)/m_s$ de 80×10^{-9} (véase 5.1.6). La varianza estimada es $u^2(m_s) = (80\,\mu g)^2 = 6{,}4 \times 10^{-9}\,g^2$.

NOTA

En muchos casos, se proporciona poca o ninguna información acerca de las componentes individuales a partir de las cuales se ha obtenido la incertidumbre asignada. Esto generalmente no es importante para la expresión de la incertidumbre de acuerdo a las prácticas de esta **Guía** *ya que todas las incertidumbres estándar se tratan del mismo modo cuando se calcula la incertidumbre estándar combinada del resultado de una medición (véase capítulo 5).*

4.3.4 La incertidumbre asignada a x_i no necesariamente está dada como un múltiplo de una desviación estándar como en 4.3.3. En lugar de eso, puede encontrarse que la incertidumbre asignada define un intervalo con un nivel de confianza de 90; 95 o 99 por ciento (véase 6.2.2). A menos que se indique otra cosa, uno puede suponer que se usó una **distribución normal** (C.2.14) para calcular la incertidumbre asignada, y recuperar la incertidumbre estándar de x, dividiendo la incertidumbre asignada por el factor apropiado para la distribución normal. Los factores correspondientes a los tres niveles de confianza mencionados son 1,64; 1,96; y 2,58 (véase también la tabla G. 1 en el anexo G).

NOTA

No habría necesidad de hacer tal suposición si la incertidumbre hubiera sido dada de acuerdo con las recomendaciones de esta **Guía** *relativas a la expresión de incertidumbres, que hacen hincapié en que siempre se debe informar el factor de cobertura usado (véase 7.2.3).*

EJEMPLO

Un certificado de calibración declara que la resistencia de un resistor patrón R_S de valor nominal diez ohms, es 10,000 742 $\Omega \pm 129\ \mu\Omega$ a 23 °C y que "la incertidumbre asignada de 129 $\mu\Omega$ define un intervalo con un nivel de confianza de 99 por ciento". La incertidumbre estándar del resistor puede tomarse como $u(R_S) = 129\ \mu\Omega/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$, que corresponde a una incertidumbre estándar relativa $u(R_S)/R_S$ de $5{,}0 \times 10^{-6}$ (véase 5.1.6). La varianza estimada es $u^2(R_S) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

4.3.5 Considere el caso donde, en base a la información disponible, es posible establecer que "existe una probabilidad cincuenta–cincuenta de que el valor de la magnitud de entrada X_i se encuentre en el intervalo de a_- hasta a_+" (en otras palabras, la probabilidad de que X_i esté dentro de este intervalo es 0,5 o 50 por ciento). Si puede suponerse que la distribución de valores posibles de X_i es aproximadamente normal, entonces la mejor estimación x_i de X_i puede tomarse como el punto medio de tal intervalo. Adicionalmente, si el semi ancho del intervalo se denota como $a = (a_+ - a_-)/2$, uno puede tomar $u(x_i) = 1{,}48a$, porque para una distribución normal con valor esperado μ y desviación estándar σ el intervalo $\mu \pm \sigma/1{,}48$ incluye aproximadamente al 50 por ciento de la distribución.

EJEMPLO

Un mecánico, al determinar las dimensiones de un objeto, estima que su longitud se encuentra, con probabilidad 0,5 en el intervalo que va de 10,07 mm a 10,15 mm, y reporta que $l = (10{,}11 \pm 0{,}04)$ mm, queriendo decir que $\pm$ 0,04 mm define un intervalo con un nivel de confianza del 50 por ciento. Entonces $a = 0{,}04$ mm, y si se supone una distribución normal para los posibles valores de l, entonces la incertidumbre estándar de la longitud es $u(l) = 1{,}48 \times 0{,}04$ mm $\approx 0{,}06$ mm y la varianza estimada es $u^2(l) = (1{,}48 \times 0{,}04\ \text{mm})^2 = 3{,}5 \times 10^{-3}\ \text{mm}^2$.

4.3.6 Considere un caso similar al de 4.3.5 pero donde, con base en la información disponible, es posible establecer que "existen alrededor de dos de cada tres posibilidades de que el valor de X_i se encuentre en el intervalo de a_- hasta a_+" (en otras palabras, la probabilidad de que X_i esté dentro de ese intervalo es alrededor de 0,67). Entonces razonablemente es posible tomar $u(x_i)=a$, porque para una distribución normal con esperanza μ y desviación estándar σ el intervalo $\mu \pm \sigma$ comprende alrededor de 68,3 por ciento de la distribución.

NOTA

Si se usara el cuantil normal de 0,967 42, correspondiente a una probabilidad p = 2/3, esto es, si se escribiera $u(x_i)= a/0{,}96742 = 1{,}033a$, entonces se daría al valor de $u(x_i)$ una exactitud mucho mayor de la que obviamente se justifica.

4.3.7 En otros casos puede que sea posible estimar sólo los límites (superior e inferior) para X_i, en particular, para establecer que "la probabilidad de que el valor de X_i esté dentro del intervalo de a_- hasta a_+, para todos los propósitos prácticos es igual a uno y la probabilidad de que X_i, caiga fuera de ese intervalo es esencialmente cero". Si no existe un conocimiento específico acerca de los posibles valores de X_i dentro del intervalo, se puede únicamente suponer que es igualmente probable para X_i tomar cualquier valor dentro del intervalo (una distribución uniforme o rectangular de valores posibles - véase 4.4.5 y figura 2a). Entonces x_i, la esperanza o el valor esperado de X_i, es el punto medio del intervalo, $x_i = (a_- + a_+)/2$, con varianza asociada

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \qquad \ldots\ldots(6)$$

Si la diferencia entre los límites, $a_+ - a_-$, se denota por $2a$, entonces la ecuación (6) se convierte en

$$u^2(x_i) = a^2/3 \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

NOTA

Cuando una componente de la incertidumbre determinada de esta manera contribuye significativamente a la incertidumbre del resultado de una medición, es prudente obtener datos adicionales para su posterior evaluación.

EJEMPLOS

1. Un manual establece el valor del coeficiente de expansión lineal térmica del cobre puro a 20 °C, α_{20} (Cu), como 16,52 x 10^{-6} °C^{-1} y simplemente declara que "el error en este valor no debería exceder 0,40 x 10^{-6}) °C^{-1}". Basados en esta información limitada, es razonable suponer que el valor de α_{20} (Cu) se encuentre, con igual probabilidad, en el intervalo que va de 16,12 x 10^{-6} °C^{-1} a 16,92 x 10^{-6} °C^{-1}, y que es muy poco probable que el valor de α_{20} (Cu) esté fuera de este intervalo. La varianza de esta distribución rectangular simétrica de valores posibles de α_{20} (Cu), con un semi ancho igual a a = 0,40 x 10^{-6} °C^{-1} es entonces, de la ecuación (7), $u^2(\alpha_{20})$ = (0,40 x 10^{-6} °C^{-1})^2/3 = 53,3 x 10^{-15} °C^{-2} y la incertidumbre estándar es $u^2(\alpha_{20})$ = (0,40 x 10^{-6} °C^{-1})/ $\sqrt{3}$ = 0,23 x 10^{-6} °C^{-1}.

2. Las especificaciones de un fabricante para un voltímetro digital establecen que "entre uno y dos años después de que el instrumento es calibrado, su exactitud en la escala de 1 V es 14 x 10^{-6} veces la lectura más 2 x 10^{-6} veces el alcance". Considere que el instrumento se usa 20 meses después de la calibración para medir en su escala de 1 V una diferencia de potencial V. Se encuentra que la media aritmética de varias observaciones independientes repetidas de V es $\overline{V}$ = 0,928 571 V con una incertidumbre estándar de Tipo A $u(\overline{V})$ = 12 µV. Puede obtenerse la incertidumbre estándar asociada con las especificaciones del fabricante a partir de una evaluación de Tipo B, suponiendo que la exactitud declarada proporciona límites simétricos para una corrección aditiva de $\overline{V}$, $\Delta\overline{V}$ de esperanza igual a cero y con igual probabilidad de que se encuentre en cualquier lugar dentro de los límites. El semi ancho a de la distribución rectangular simétrica de los valores posibles de $\Delta\overline{V}$ es entonces a = (14 x 10^{-6}) x (0,928 571 V) + (2 x 10^{-6}) x (1 V) = 15 µV, y de la ecuación (7), $u^2(\Delta\overline{V})$= 75 µV^2 y $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 µV. La estimación del valor del mesurando V, por simplicidad denotado con el mismo símbolo V, está dado por V = $\overline{V}$ + $\Delta\overline{V}$ = 0,928 571 V. Puede obtenerse la incertidumbre estándar combinada de esta estimación combinando la incertidumbre estándar de Tipo A de 12 µV de V con la incertidumbre estándar de Tipo B de 8,7 µV de $\Delta\overline{V}$. El método general para combinar las componentes de incertidumbre estándar se dan en el capítulo 5, con este ejemplo particular tratado en 5.1.5.

4.3.8 En 4.3.7 los límites superior e inferior, a_+, y a_-, respectivamente para la magnitud de entrada X_i podrían no ser simétricos con respecto a su mejor estimación x_i; más específicamente, si el límite inferior se escribe como $a_- = x_i - b_-$ y el límite superior como $a_+ = x_i + b_+$, entonces $b_- \neq b_+$. Debido a que en este caso x_i (que se supone es la esperanza de X_i) no está en el centro del intervalo de a_- hasta a_+, entonces la distribución de probabilidad de X_i no puede ser uniforme en todo el intervalo. Sin embargo, podría no haber suficiente información disponible para escoger una distribución adecuada; diferentes modelos conducirán a diferentes expresiones para la varianza . En ausencia de tal información la aproximación más simple es:

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

la cual es la varianza de una distribución rectangular con ancho $b_+ + b_-$ (Las distribuciones asimétricas se discuten también en F.2.4.4 y G.5.3.)

EJEMPLO

Si en el ejemplo 1 de 4.3.7 el valor del coeficiente de expansión térmica se da en el manual como $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52 \times 10^{-6}$ °C^{-1} y se establece que "el valor posible más pequeño es $16{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1} y el valor posible más grande de α_{20} (Cu), es $16{,}92 \times 10^{-6}$ °C^{-1}", entonces $b_- = 0{,}12 \times 10^{-6}$ °C^{-1}; $b_+ = 0{,}40 \times 10^{-6}$ °C^{-1} y, de la ecuación (8), $u(\alpha_{20}) = 0{,}15 \times 10^{-6}$ °C^{-1}.

NOTAS

1. *En muchas situaciones prácticas de medición en donde los límites son asimétricos, podría ser apropiado aplicar una corrección a la estimación x_i cuya magnitud sea igual a $(b_+ - b_-)/2$ de tal modo que la nueva estimación x_i de X_i sea el punto medio de los límites : $x'_i = (a_- + a_+)/2$. Esto reduce la situación al caso de 4.3.7, con nuevos valores $b'_+ = b'_- = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.*

2. *Con base en el principio de la máxima entropía, puede demostrarse que la función de densidad de probabilidad en el caso asimétrico es $p(X_i) = A \exp[-\lambda (X_i - x_i)]$, donde $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ y $\lambda = \{\exp[\lambda (b_- + b_+) - 1\} / \{ b_- \exp[\lambda (b_- + b_+)] + b_+ \}$. Esto conduce a la varianza $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$; para $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ y para $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$*

4.3.9 En 4.3.7, debido a que no había conocimiento específico acerca de los posibles valores de X_i dentro de sus límites estimados a_- y a_+ , solo se podía suponer que para X_i era igualmente probable tomar cualquier valor dentro de estos límites, con probabilidad cero de caer fuera de ellos. Tales discontinuidades de la función escalón en una distribución de probabilidad raramente se da en la física. En muchos casos es más realista esperar que los valores cercanos a los límites sean menos probables que aquellos que están cerca del punto medio.

Es entonces razonable reemplazar la distribución rectangular simétrica con una distribución trapezoidal simétrica con igual pendiente en ambos lados (un trapezoide isósceles), una base inferior de longitud $a_+ - a_- = 2a$, y una base superior de longitud $2a\hat{a}$, donde $0 \leq \hat{a} \leq 1$. Conforme $\hat{a} \rightarrow 1$ esta distribución trapezoidal se aproxima a la distribución rectangular de 4.3.7, mientras que para $\hat{a} = 0$ ésta es una distribución triangular (véase 4.4.6 y, figura 2b).

Suponiendo tal distribución trapezoidal para X_i, uno encuentra que la esperanza de X_i es $x_i = (a_- + a_+)/2$ y su varianza asociada es:

$$u^2 (x_i) = a^2 (1 + \hat{a}^2) / 6 \qquad \text{... (9a)}$$

la cual se convierte para la distribución triangular, con $\hat{a} = 0$, en

$$u^2 (x_i) = a^2/ 6 \qquad \text{... (9b)}$$

NOTAS

1. *Para una distribución normal con esperanza μ y desviación estándar σ, el intervalo $\mu \pm 3\sigma$ cubre aproximadamente 99,73 porciento de la distribución. Entonces, si los límites superior e inferior a_+ y a_- definen límites al 99,73 por ciento, en lugar de límites al 100 por ciento, y puede suponerse que X_i tiene una distribución aproximadamente normal, en lugar de asumir que no se tiene información sobre X_i, entre los límites como en 4.3.7 , entonces $u^2(x_i) = a^2/9$. Para fines de comparación, la varianza de una distribución rectangular simétrica con semi ancho a es $a^2/3$ [ecuación (7)] y la de una distribución triangular simétrica con semi ancho a es $a^2/6$ [(ecuación (9b)]. La magnitud de las varianzas de las tres distribuciones son sorprendentemente similares a pesar de las grandes diferencias en la cantidad de información requerida para justificarlas.*

2. *La distribución trapezoidal es equivalente a la convolución de dos distribuciones rectangulares [10] una con semi ancho a_1 igual al promedio del semi ancho de una distribución trapezoidal, $a_1 = a(1 + \beta)/2$, la otra con un semi ancho a_2 igual al promedio de la longitud de una de las porciones triangulares del trapezoide, $a_2 = a(1 - \beta)/2$. La varianza de la distribución es $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. La distribución convolucionada puede interpretarse como una distribución rectangular cuyo ancho, $2a_1$, tiene una incertidumbre propia representada por una distribución rectangular de ancho $2a_1$ y que modela el hecho de que los límites de una magnitud de entrada no son exactamente conocidos. Pero aún si a_2 es tan grande como un 30 por ciento de a_1, u es mayor que $a_1/\sqrt{3}$ por menos del 5 por ciento.*

4.3.10 Es importante no "contar dos veces" las componentes de la incertidumbre. Si una componente de incertidumbre que resulta de un efecto en particular se obtiene a partir de una evaluación de Tipo B , debería incluirse como una componente independiente de incertidumbre en el cálculo de la incertidumbre estándar combinada del resultado de la medición únicamente hasta el punto que el efecto no contribuya a la variabilidad apreciada en las observaciones. Esto es así porque la incertidumbre debida a que la porción del efecto que contribuye a la variabilidad observada está ya incluida en la componente de incertidumbre obtenida a partir del análisis estadístico de las observaciones.

4.3.11 La discusión sobre la evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar hecha en las secciones 4.3.3 a 4.3.9 debe entenderse solo como indicativas. Adicionalmente, las evaluaciones de incertidumbre deberían basarse en datos cuantitativos tanto como sea posible, tal como se enfatiza en las secciones 3.4.1. y 3.4.2.

4.4 Ilustración gráfica de la evaluación de la incertidumbre estándar.

4.4.1 La figura 1 representa la estimación del valor de una magnitud de entrada X_i y la evaluación de la incertidumbre de esta estimación a partir de la distribución desconocida de los posibles valores medidos de X_i , o la distribución de probabilidad de X_i , muestreadas mediante observaciones repetidas.

4.4.2 En la figura 1a se asume que la magnitud de entrada X_i es una temperatura t y que su distribución desconocida es una distribución normal con esperanza μ_t = 100 °C y desviación estándar σ = 1,5 °C . Su función de densidad de probabilidad es entonces (véase C.2.14):

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(t-\mu_t)^2 / 2\,\sigma^2\right]$$

NOTA

La definición de una función de densidad de probabilidad p(z) requiere que se satisfaga la relación siguiente: $\int p(z)\,dz = 1$

4.4.3 La figura 1b muestra un histograma de n = 20 observaciones repetidas t_k de la temperatura t que se supone han sido tomadas aleatoriamente de la distribución de la figura 1a. Para obtener el histograma, las 20 observaciones o muestras, cuyos valores se dan en la tabla 1, se agrupan en intervalos de 1 °C . (la preparación de histogramas, por supuesto, no se requiere para el análisis estadístico de los datos.)

La media aritmética o promedio $\bar{t}$ de las n = 20 observaciones calculada de acuerdo a la ecuación (3) es $\bar{t}$ = 100,145 °C ≈ 100, 14 °C, asumiéndose que es la mejor estimación de la esperanza μ_t de t basada en los datos disponibles. La desviación estándar experimental $s(t_k)$ calculada usando la ecuación (4) es $s(t_k)$ = 1,489 °C ≈ 1,49 °C y la desviación estándar experimental de la media $s(\bar{t})$ calculada usando la ecuación (5), la cual es la incertidumbre estándar $u(\bar{t})$ de la media $\bar{t}$, es: $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = u(t_k)/\sqrt{20}$ = 0,333 °C ≈ 0,33 °C.

Para cálculos adicionales, es probable que todos los dígitos debieran ser conservados.

Tabla 1. *Veinte observaciones repetidas de la temperatura t agrupadas en intervalos de 1 °C.*

Intervalo, $t_1 \leq t < t_2$		Temperatura (t/°C)
t_1 / °C	t_2 / °C	
94,5	95,5	——
95,5	96,5	——
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	——
104,5	105,5	——

NOTA

Aunque los datos de la tabla 1 no son irrazonables considerando el amplio uso de los termómetros digitales electrónicos de alta resolución, sólo tienen propósitos ilustrativos y no deben interpretarse como descripciones de una medición real.

4.4.4 La figura 2 representa la estimación del valor de una magnitud de entrada X_i y la evaluación de la incertidumbre de esa estimación a partir de una distribución *a priori* de valores posibles de X_i o distribución de probabilidad de X_i ,basada en toda la información disponible. Para los dos casos mostrados, se supone que la magnitud de entrada es, nuevamente, una temperatura *t*.

4.4.5 Para el caso ilustrado en la figura 2a, se asume que se dispone de menos información acerca de la magnitud de entrada *t* y que todo lo que puede hacerse es suponer que *t* está descrita mediante una distribución de probabilidad *a priori* simétrica y rectangular, con límite inferior

$a_- = 96$ °C , límite superior $a_+ = 104$ °C , y, por lo tanto un semi ancho $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C (véase 4.3.7). La función de densidad de probabilidad t es entonces

$$p(t) = 1/2\,a\,, \quad a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0\,, \quad \text{en cualquier otro caso}$$

Como se indica en 4.3.7, la mejor estimación de t es su esperanza $\mu_t = (a_+ - a_-)/2 = 100$ °C , que resulta de C.3. 1.

La incertidumbre estándar de esta estimación es $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2{,}3$ °C, lo cual se sigue de C.3.2 [véase ecuación (7)].

4.4.6 Para el caso ilustrado en la figura 2b, se supone que la información disponible sobre t es menos limitada y que t puede describirse mediante una distribución de probabilidad *a priori* simétrica y triangular, con el mismo límite inferior $a_- = 96$ °C, el mismo límite superior $a_+ = 104$ °C, y, por lo tanto, con el mismo semi ancho $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C como en 4.4.5 (véase 4.3.9). La función de densidad de probabilidad de t es entonces

$$p(t) = (t - a_-) / a^2, \quad a_- \leq t \leq (a_+ + a_-) / 2$$

$$p(t) = (a_+ - t) / a^2, \quad (a_+ + a_-) / 2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0 \quad \text{en cualquier otro caso}$$

Como se indica en 4.3.9, la esperanza de t es $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, lo cual se sigue de C.3.1. La incertidumbre estándar de esta estimación es $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1{,}6$ °C, lo cual se sigue de C.3.2 [véase ecuación (9b)].

El valor anterior, $u(\mu_t) = 1{,}6$ °C, puede compararse con $u(\mu_t) = 2{,}3$ °C obtenido en 4.4.5 a partir de una distribución rectangular del mismo ancho de 8 °C ; contra $\sigma = 1{,}5$ °C de la distribución normal de la figura 1a cuyo ancho de $-2{,}58\sigma$ a $+2{,}58\,\sigma$, que incluye el 99 por ciento de la distribución, es cercano a 8 °C; y con $u(\bar{t}) = 0{,}33$ °C obtenido en 4.4.3 a partir de 20 observaciones que se suponen fueron tomadas aleatoriamente de la misma distribución normal.

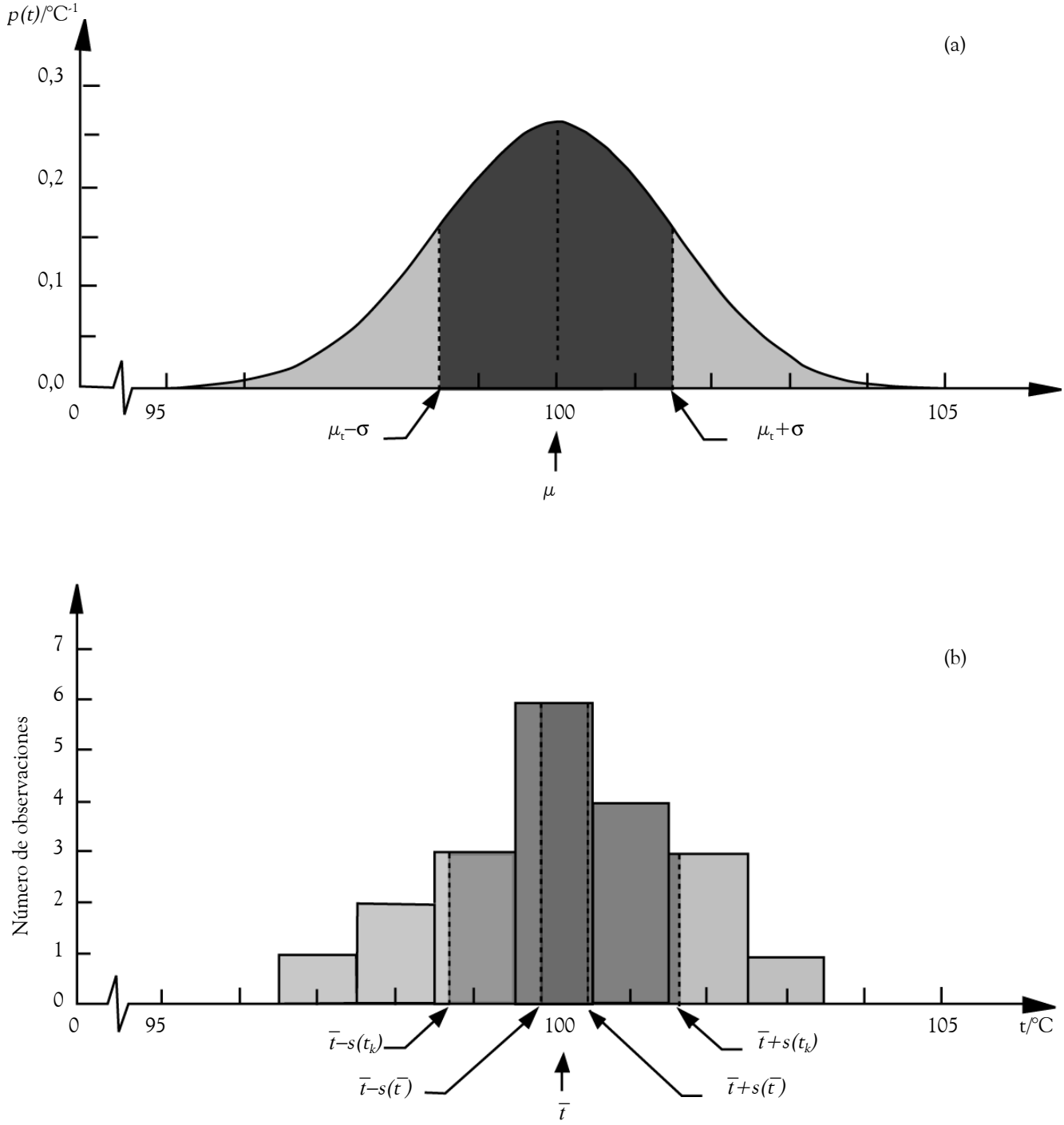

Figura 1. Ilustración gráfica de la evaluación de la incertidumbre estándar de una magnitud de entrada, a partir de observaciones repetidas

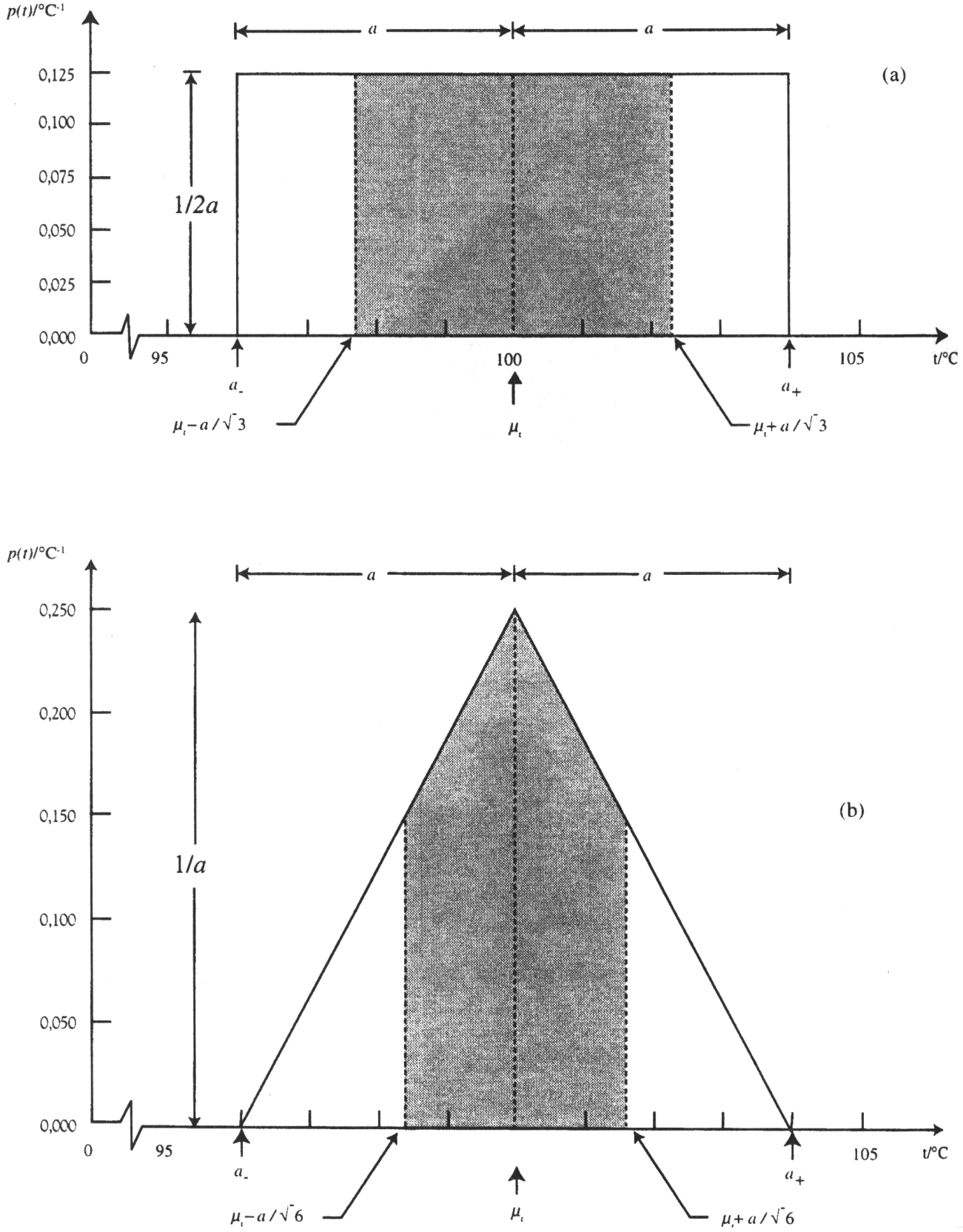

Figura 2. Ilustración gráfica de la evaluación de la incertidumbre estándar de una magnitud de entrada, a partir de una distribución supuesta *a priori*

5. Determinación de la incertidumbre estándar combinada

5.1 Magnitudes de entrada no correlacionadas

Este apartado trata el caso en el cual todos las magnitudes de entrada son **independientes** (C.3.7). El caso en el cual dos o más magnitudes de entrada están relacionados, esto es, son interdependientes o **correlacionados** (C.2.8), se analiza en 5.2 .

5.1.1 La incertidumbre estándar de y, donde y es la estimación del mensurando Y , y por lo tanto el resultado, de la medición, se obtiene combinando apropiadamente las incertidumbres estándar de las estimaciones de las magnitudes de entrada x_1, x_2,.... x_N, (véase 4.1). Esta *incertidumbre estándar combinada* de la estimación y se denota por $u_c(y)$.

NOTA

Por razones similares a las dadas en la nota de 4.3.1, los símbolos $u_c(y)$ y $u_c^2(y)$ se usan en todos los casos.

5.1.2 La incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ es la raíz cuadrada positiva de la varianza combinada, $u_c^2(y)$, la cual está dada por:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \qquad \text{..... (10)}$$

donde f es la función dada en la ecuación 1. Cada $u(x_i)$ es una incertidumbre estándar evaluada como se describe en 4.2 (evaluación de Tipo A) o como en 4.3 (evaluación de Tipo B). La incertidumbre estándar combinada, $u_c(y)$ es una desviación estándar estimada que caracteriza la dispersión de los valores que pueden atribuirse razonablemente al mensurando Y (véase 2.2.3).

La ecuación (10) y su contraparte para magnitudes de entrada correlacionadas, ecuación (13), las cuales están basadas en una aproximación en serie de Taylor de orden de $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, expresan lo que en esta **Guía** se denomina la *ley de propagación de incertidumbres* (véase E.3.1 y E.3.2).

NOTA

Cuando la no linealidad de f es significativa, deben incluirse términos de orden superior de la expansión en serie de Taylor de la expresión para $u_c^2(y)$, ecuación (10). Cuando la función de distribución de cada X_i es simétrica alrededor de su media, los términos más importantes del orden inmediatamente superior que deben ser añadidos a los términos de la ecuación (10) son:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i)\, u^2(x_j)$$

Véase H.1 para un ejemplo de una situación donde la contribución de los términos de orden superior en $u_c^2(y)$ necesitan considerarse.

5.1.3 Las derivadas parciales $\partial f/\partial x_i$ son iguales a $\partial f/\partial X_i$ evaluadas en $X_i = x_i$ (véase la nota 1 más adelante). Estas derivadas, llamadas frecuentemente coeficientes de sensibilidad, describen cómo la estimación y varía con los cambios de las estimaciones de las magnitudes de entrada x_1, x_2,.... x_N . En particular, el cambio en y producido por un pequeño cambio Δx_i , en la estimación de la magnitud de entrada x_i está dado por $(\Delta y)_i = (\partial f/\partial x_i)\ (\Delta x_i)$. Si este cambio se genera por la incertidumbre estándar de la estimación x_i , entonces la correspondiente variación en y es $(\partial f/\partial x_i)\, u(x_i)$. La varianza combinada $u_c^2(y)$ puede entonces véasese como una suma de términos, cada uno de los cuales representa la varianza estimada asociada con la estimación de salida y generada por la varianza estimada asociada con cada estimación de entrada x_i.

Esto sugiere escribir la ecuación (10) como

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left[c_i u(x_i) \right]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \qquad \ldots(11a)$$

donde

$$ci \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad u(y) \equiv |\, c_i \,|\, u(x_i) \qquad \ldots(11b)$$

NOTAS

1. *Hablando estrictamente, las derivadas parciales son $\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i$ evaluadas en las esperanzas de X_i. Sin embargo, en la práctica, las derivadas parciales se estiman mediante*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$

2. *La incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ puede ser calculada numéricamente si se substituye $c_i u(x_i)$ en la ecuación(11a) por*

$$Z_i = \frac{1}{2}[f\,(x_1, \ldots\ldots, x_i + u(x_i), \ldots\ldots\ldots x_N) - f\,(x_1, \ldots\ldots, \mathbf{x_i} - u(x_i), \ldots\ldots, x_N)]$$

Esto es, $u_i(y)$ es evaluada numéricamente calculando el cambio en y debido al cambio en x_i de $+ u(x_i)$ hasta $- u(x_i)$. El valor de $u_i(y)$ puede entonces ser tomado como $|Z_i|$ y el valor del correspondiente coeficiente de sensibilidad c_i como $Z_i/u(x_i)$.

EJEMPLO

En el ejemplo 4.1.1, usando, por simplicidad de notación, el mismo símbolo para la cantidad y su estimación

$$c_1 \equiv \partial P/\partial V = 2V/R_0\,[1+\alpha(t-t_0)] = 2P/V$$

$$c_2 \equiv \partial P/\partial R_0 = -V^2/R_0^2\,[1+\alpha(t-t_0)] = -P/R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P/\partial \alpha = -V^2\,(t-t_0)/R_0\,[1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P\,(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P/\partial t = -V^2\,\alpha/R_0\,[1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P\,\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

y

$$u^2(\mathrm{P}) = \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}\right]^2 \mathrm{u}^2(\mathrm{V}) + \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{R_o}}\right]^2 \mathrm{u}^2(\mathrm{R_O}) + \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \alpha}\right]^2 \mathrm{u}^2(\alpha) + \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t}\right]^2 \mathrm{u}^2(t)$$

$$= [c_1\,u(\mathrm{V})]^2 + [c_2\,u\,(\mathrm{R_O})]^2 + [c_3\,u(\alpha)]^2 + [c_4\,u(t)]^2$$

$$= u_1^2(\mathrm{P}) + u_2^2(\mathrm{P}) + u_3^2(\mathrm{P}) + u_4^2(\mathrm{P})$$

5.1.4 Los coeficientes de sensibilidad $\partial f/\partial x_i$, en lugar de ser calculados a partir de la función f, son algunas veces determinados experimentalmente: se mide el cambio en Y producido por un cambio en una X_i particular, manteniéndose constantes a las demás. En este caso, el conocimiento de la función f (o una porción de esta cuando solamente algunos coeficientes de sensibilidad son determinados de esta manera) se ve reducido a una expansión en serie de Taylor de primer orden experimental basada en los coeficientes de sensibilidad medidos.

5.1.5 Si la ecuación (1) para el mensurando Y es expandida alrededor de los valores nominales $X_{i,o}$ de las magnitudes de entrada X_i, entonces, a primer orden (que es usualmente una aproximación adecuada), $Y = Y_o + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \ldots + c_N\delta_N$, donde $Y_o = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \ldots X_{N,0})$, $c_i = (\partial f/\partial X_i)$ evaluada en $X_i = X_{i,0}$, y $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Así, para los propósitos de un análisis de incertidumbres, un mensurando es usualmente aproximado por una función lineal de sus variables al transformar sus magnitudes de entrada de X_i a δ_i (véase E.3.1).

EJEMPLO

Del ejemplo 2 de 4.3.7, la estimación del valor del mensurando V es $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$, *donde* $\overline{V} = 0{,}928\ 571$ V, $u(\overline{V}) = 12\ \mu V$, *la corrección aditiva* $\Delta\overline{V} = 0$, *y* $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7\ \mu V$. *Ya que* $\partial V/\partial\overline{V} = 1$ *y* $\partial V/\partial(\Delta\overline{V}) = 1$, *la varianza combinada asociada con V está dada por*

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = (12\ \mu V)^2 + (8{,}7\ \mu V)^2$$

$$= 219 \times 10^{-12}\ V^2$$

y la incertidumbre estándar combinada es $u_c(V) = 15\ \mu V$, *la cual corresponde a una incertidumbre estándar combinada relativa* $u_c(V)/V$ *de* 16×10^{-6} *(véase 5.1.6). Este es un ejemplo del caso en donde el mensurando es una función lineal de las magnitudes de que depende, con coeficientes* $c_i = +1$. *Se sigue de, la ecuación (10) que si* $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + C_NX_N$, *y si las constantes* $c_i = +1$ *ó* -1, *entonces*

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$$

5.1.6 Si Y es de la forma

$$Y = cX_1^{p_1}\ X_2^{p_2} \ldots X_N^{p_N}$$

y los exponentes p_i son números conocidos positivos o negativos que tienen incertidumbres despreciables, la varianza combinada, ecuación (10), puede ser expresada como

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} [p_i u(x_i)/x_i]^2 \qquad \ldots(12)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la (11a) pero con la varianza combinada $u_c^2(y)$ expresada como una *varianza combinada relativa* $[u_c(y)/y]^2$ y la varianza estimada $u^2(x_i)$ asociada con cada estimación de entrada expresada como *una varianza relativa* estimada $[u(x_i)/x_i]^2$. (La

incertidumbre estándar combinada relativa es $u_c(y)/|y|$ y *la incertidumbre estándar relativa* de cada estimación de entrada es $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ y $|x_i| \neq 0$).

NOTAS

1. *Cuando Y tiene esta forma, su transformación a una función lineal de variables (véase 5.1.5) se realiza fácilmente haciendo* $X_i = X_{i,0}$ *,* $(1 + \delta_i)$*, de donde se sigue la relación aproximada:* $(Y - Y_o)/Y_o = \sum_{i=1}^{N} p_i \delta_i$ *. Por otro lado, la transformación logarítmica* $Z = \ln Y$ *y* $W_i = \ln X_i$ *conduce a una linealización exacta en términos de las nuevas variables:*

$$Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$$

2. *Si cada* p_i *es +1 ó - 1, la ecuación (12) se puede escribir como* $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} [u(x)_i / x_i]^2$ *, la cual muestra que para este caso especial la varianza combinada relativa asociada a la estimación de y es simplemente igual a la suma de las varianzas relativas estimadas asociadas con las estimaciones de entrada* x_i*.*

5.2 Magnitudes de entrada correlacionadas

5.2.1 La ecuación (10) y las deducidas a partir de ella, tales como las ecuaciones (11) y (12) son válidas solamente si las magnitudes de entrada X_i son independientes o no correlacionados (las variables aleatorias, no las magnitudes físicas que son asumidas como invariantes véase 4.1.1, nota 1). Si algunas de las X_i están significativamente correlacionados, las correlaciones deben tomarse en cuenta.

5.2.2 Cuando las magnitudes de entrada están correlacionadas, la expresión apropiada para la varianza combinada $u_c^2(y)$ asociada al resultado de una medición es

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \qquad \ldots(13)$$

donde x_i y x_j son las estimaciones de X_i y X_j y $u(x_i , x_j) = u(x_j , x_i)$ es la covarianza estimada asociada con x_i y x_j. El grado de correlación entre x_i y x_j está caracterizado por el **coeficiente de correlación** estimado (C.3.6).

$$r\,(x_i\,,\,x_j\,) = \frac{u\,(x_i\,,\,x_j)}{u\,(x_i)\,u(x_j)} \qquad \ldots (14)$$

donde $r(x_i\,,\,x_j) = r(x_j,\,x_i)$, y $-1 \le r(x_i\,,\,x_j) \le +1$. Si las estimaciones x_i y x_j son independientes $r(x_i,\,x_j) = 0$, y un cambio en una de ellas no implica un cambio esperado en la otra. (véase C.2.8, C.3.6, y C.3.7 para una discusión más extensa.)

En términos de coeficientes de correlación, que son más fácilmente interpretables que las covarianzas, el término de covarianza de la ecuación (13) puede ser escrito como

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \qquad \ldots(15)$$

La ecuación (13) se puede escribir entonces, con la ayuda de la ecuación (11b), como

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i)u(x_j)r(x_i,x_j) \qquad \ldots(16)$$

NOTAS

1. *Para el caso muy especial donde todas las estimaciones de entrada están correlacionadas con coeficientes de correlación $r(x_i\,,\,x_j) = +1$, la ecuación (16) se reduce a:*

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2$$

La incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ es, por lo tanto, simplemente la raíz cuadrada positiva de una suma lineal de términos que representan la variación de la estimación de salida del mensurando y generada por la incertidumbre estándar de cada estimación de entrada x_i (véaes 5.1.3). (Esta suma lineal no debe confundirse con la ley general de propagación de errores que tiene una forma similar; las incertidumbres estándares no son errores (véase E.3.2)).

EJEMPLO

1. *Diez resistores, cada uno de resistencia nominal $R_i = 1000\ \Omega$, se calibran con una incertidumbre despreciable, por comparación con respecto a la resistencia patrón R_s de 1000 Ω caracterizada por una incertidumbre estándar $u(R_s) = 100\ m\Omega$, de acuerdo con su certificado de calibración. Los resistores se conectan en serie con alambres de resistencia despreciable para obtener una resistencia de referencia R_{ref} de valor nominal 10 k Ω . Así que:*

$$R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$$

Puesto que $r(x_i\,,\,x_j) = r(R_i\,,\,R_j) = +1$ para cada par de resistoress (véase F.1.2.3 , ejemplo 2), entonces la ecuación de esta nota se aplica. Dado que para cada resistor $\partial f/\partial x_i = \partial R_{ref}/\partial R_i = 1$ y $u\,(x_i) = u(R_i) = u(R_s)$ (véase F. 1.2.3, ejemplo 2), esta ecuación da como resultado para la incertidumbre estándar combinada de R_{ref} ,

$$u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_s) = 10 \text{ x } (100 \text{ m}\Omega) \ = 1\,\Omega$$

Así que el resultado

$$u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_s) \right]^{1/2} = 0{,}32\,\Omega$$

obtenido de la ecuación (10) es incorrecto ya que no toma en cuenta que todos los valores de las calibraciones de los diez resistores están correlacionados.

2. *Las varianzas estimadas $u^2(x_i)$ y las covarianzas estimadas $u(x_i , x_j)$ pueden considerarse como los elementos de una matriz de covarianza con elementos u_{ij} . Los elementos de la diagonal u_{ii} de la matriz son las varianzas $u^2(x_i)$, mientras que los elementos fuera de la diagonal u_{ij} $(i \neq j)$ son las covarianzas $u(x_i , x_j) = u(x_j , x_i)$. Si las dos estimaciones de entrada no están correlacionadas, entonces su covarianza asociada y los elementos correspondientes u_{ij} y u_{ji} de la matriz de covarianza son 0 . Si todas las estimaciones de entrada no están correlacionadas, todos los elementos fuera de la diagonal son cero y la matriz de covarianza es diagonal. (véase también (C.3.5)).*

3. *Para propósitos de evaluación numérica, la ecuación (16) puede ser escrita como*

$$u_c^2(y) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j \ \ r(x_i, x_j)$$

donde Z_i está dada en 5.1.3, nota 2.

4. *Si las X_i son de la forma especial considerada en 5.1.6 y además están correlacionadas, entonces los términos*

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \ [p_i u(x_i)/x_i] \ [p_j u(x_j)/x_j] \ r(x_i , x_j)$$

deben ser agregados al lado derecho de la ecuación (12).

5.2.3 Considérense dos medias aritméticas $\bar{q}$ y $\bar{r}$ que estiman las esperanzas μ_q y μ_r , de dos magnitudes que varían aleatoriamente q y r . Calcúlense $\bar{q}$ y $\bar{r}$ a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas de q y r hechas bajo las mismas condiciones de medición (véase B.2.15). Entonces la covarianza de $\bar{q}$ y $\bar{r}$ pueden estimarse por (véase C.3.4)

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})\,(r_k - \bar{r}) \qquad \ldots(17)$$

donde q_k y r_k son las observaciones individuales de las magnitudes q y r , y $\bar{q}$ y $\bar{r}$ se calculan a partir de las observaciones de acuerdo con la ecuación (3). Si, en efecto, las observaciones no están correlacionadas, se espera que la covarianza calculada sea aproximadamente cero.

Así, la covarianza estimada de dos magnitudes de entrada correlacionadas X_i y X_j que se estima mediante las medias $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$, determinada a partir de pares independientes de observaciones simultáneas repetidas está dada por $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$, con $s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ calculada de acuerdo a la ecuación (17). Esta aplicación de la ecuación (17) es una evaluación de Tipo A de la covarianza. El coeficiente de correlación estimado para $\overline{X}_i$ y $\overline{X}_j$, se obtiene de la ecuación (14): $r(x_i, x_j) = r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$.

NOTA

En H.2 y H.4 se muestran ejemplos en los cuales es necesario usar covarianzas como las calculadas mediante la ecuación (17).

5.2.4 Puede existir una significativa correlación entre dos magnitudes de entrada si se ha usado, para su determinación, un mismo instrumento de medición, patrón físico de medición, o datos de referencia que tengan una incertidumbre estándar significativa. Por ejemplo, si un determinado termómetro es utilizado para encontrar una corrección de temperatura requerida en la estimación del valor de la magnitud de entrada X_i , y el mismo termómetro se usa para determinar una similar corrección de temperatura requerida en la estimación de la magnitud de entrada X_j entonces las dos magnitudes de entrada podrían estar significativamente correlacionadas. Sin embargo, si X_i y X_j, en este ejemplo se redefinen como las magnitudes no corregidas y las magnitudes que definen la curva de calibración para el termómetro se incluyen como magnitudes de entrada adicionales con incertidumbres estándar independientes, entonces la correlación entre X_i y X_j desaparece. (véase F.1.2.3 y F.1.2.4 para un análisis más amplio).

5.2.5 No pueden ignorarse las correlaciones entre magnitudes de entrada cuando aquellas existen y son significativas. Las covarianzas asociadas deben evaluarse experimentalmente, de ser posible, variando las magnitudes de entrada correlacionadas (véase C.3.6, nota 3), o usando toda la información disponible sobre la variabilidad correlacionada de las magnitudes en cuestión (evaluación de Tipo B de la covarianza). La intuición basada en la experiencia y el conocimiento general (véase 4.3.1 y 4.3.2) son especialmente requeridos para estimar el grado de correlación entre magnitudes de entrada que surgen de los efectos de influencias comunes, tales como la temperatura ambiente, la presión barométrica, y la humedad. Afortunadamente, en muchos casos, los efectos de tales influencias tienen interdependencia despreciable y las magnitudes de entrada afectadas pueden ser asumidos como no correlacionadas. Sin embargo, si no puede suponerse la no correlación, entonces las correlaciones mismas pueden evitarse si se consideran como magnitudes de entrada adicionales las influencias comunes tal como se indica en 5.2.4.

6. Determinación de la incertidumbre expandida

6.1 Introducción

6.1.1 La recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres, sobre la cual se basa la presente **Guía** (véase la Introducción), y las Recomendaciones 1 (CI-1981) y 1 (CI-1986) del CIPM que aprueban y reafirman la INC-1 (1980) (véase A.2 y A.3), abogan por el uso de la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ como el parámetro para expresar cuantitativamente la incertidumbre del resultado de una medición. En efecto, en la segunda de sus recomendaciones, el CIPM ha solicitado que lo que ahora se conoce con el nombre de incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ sea utilizado "por todos los participantes al informar sobre los resultados de todas las comparaciones internacionales u otros trabajos hechos bajo los auspicios del CIPM y de los Comités Consultivos".

6.1.2 Aunque $u_c(y)$ puede usarse universalmente para expresar la incertidumbre del resultado de una medición, en algunas aplicaciones comerciales, industriales o regulatorias, y cuando la salud o la seguridad están involucradas, es frecuentemente necesario proporcionar una medida de la incertidumbre que define un intervalo alrededor del resultado de la medición que se espera incluya una fracción suficientemente grande de la distribución de valores que razonablemente pueden atribuirse al mensurando. La existencia de este requisito fue reconocida por el Grupo de Trabajo y originó el párrafo 5 de la recomendación INC-1 (1980). Esto también se ve reflejado en la Recomendación 1 (CI-1986) del CIPM.

6.2 Incertidumbre expandida

6.2.1 La medida adicional de la incertidumbre que cumple con el requisito de definir un intervalo del tipo indicado en el párrafo 6.1.2 es llamada *incertidumbre expandida* y se denota por el símbolo U. La incertidumbre expandida U se obtiene al multiplicar la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por un *factor de cobertura* k:

$$U = ku_c(y) \qquad \text{... (18)}$$

El resultado de una medición se expresa entonces, convenientemente, como $Y = y \pm U$, que se interpreta diciendo que la mejor estimación del valor atribuible al mensurando Y es y, y que se espera que el intervalo que va de $y - U$ a $y + U$ abarque una fracción suficientemente grande de la distribución de los valores que razonablemente pueden atribuirse a Y. Tal intervalo también puede expresarse como; $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Los términos **intervalo de confianza** (C.2.27, C.2.28) y **nivel de confianza** (C.2.29) tienen definiciones específicas en estadística y sólo se aplican al intervalo definido por U cuando se satisfacen ciertas condiciones, incluyendo aquella de que todas las componentes de la incertidumbre que contribuyen a $u_c(y)$ sean obtenidas de las evaluaciones de Tipo A. Entonces, en esta **Guía**, la palabra "confianza" no se usa para modificar a la palabra "intervalo" cuando se hace referencia al intervalo definido por U; y el término "intervalo de confianza" no se usa para hacer referencia a ese intervalo, utilizándose, en cambio, el término "nivel de confianza". Más específicamente, se debe interpretar a U como el valor que define un intervalo alrededor del resultado de la medición que abarca una fracción suficientemente grande p de la distribución de probabilidad caracterizada por ese resultado y su incertidumbre estándar combinada, y así p es la *probabilidad de cobertura* o *nivel de confianza* del intervalo.

6.2.3 Cuando sea posible, el nivel de confianza p asociado con el intervalo definido por U deberá ser estimado y declarado. Debe reconocerse que al multiplicar a $u_c(y)$ por una constante no se añade nueva información, sino que se presenta a la información previamente disponible en una forma diferente. Sin embargo, también debe de reconocerse que en la mayoría de los casos el nivel de confianza p (especialmente en los casos cuando p toma valores cercanos a la unidad) es un tanto inseguro, no sólo por la limitación en el conocimiento de la distribución de probabilidad caracterizada por y y por $u_c(y)$ (particularmente en los extremos), sino también por la incertidumbre en $u_c(y)$ misma (véase nota 2 a 2.3.5, 6.3.2 y el anexo G, particularmente G.6.6).

NOTA

Para obtener información acerca de las formas más comunes para declarar el resultado de una medición, tanto cuando la medida de la incertidumbre es $u_c(y)$, como cuando ésta es U, véanse 7.2.2 y 7.2.4, respectivamente.

6.3 Elección del factor de cobertura

6.3.1 El valor del factor de cobertura k se elige en base al nivel de confianza requerido para el intervalo de $y - U$ a $y + U$. En general, k tomará valores entre 2 y 3. Sin embargo, para ciertas aplicaciones especiales k podrá estar fuera de este intervalo de valores. El grado de experiencia y el conocimiento a fondo del uso que se le dé a los resultados de las mediciones, puede facilitar grandemente la selección del valor apropiado para k.

NOTA

Ocasionalmente, es posible encontrar que una corrección conocida b de un efecto sistemático no ha sido aplicada al resultado reportado de una medición, por el contrario, se ha tratado de tomar en cuenta este efecto ampliando la "incertidumbre" asignada al resultado. Esto debe evitarse; solo en circunstancias muy especiales no se aplicarán las correcciones para efectos sistemáticos significativos conocidos al resultado de una medición (véase F.2.4.5 para un caso específico y su tratamiento). La evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición no debe confundirse con asignar niveles de seguridad a una magnitud.

6.3.2 Idealmente, debería poderse elegir un valor específico del factor de cobertura k que determinaría al intervalo $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ correspondiente al nivel de confianza particular p, tal como 95 ó 99 por ciento; en forma equivalente, para un valor dado de k, sería agradable poder establecer inequívocamente el nivel de confianza asociado con ese intervalo. Sin embargo, esto no es sencillo de hacer en la práctica ya que se requiere un amplio conocimiento de la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de la medición y, y su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$. Aunque estos parámetros son de importancia crítica, son por sí mismos insuficientes para el propósito de establecer intervalos que tengan niveles de confianza exactamente conocidos.

6.3.3 La recomendación INC-1 (1980) no especifica como deberá establecerse la relación entre p y k . Este problema se discute en el anexo G, y el método preferencial para su solución aproximada se presenta en G.4 y se resume en G.6.4 . No obstante, un enfoque más sencillo, discutido en G.6.6, es a menudo adecuado en situaciones de medición en donde la distribución de la probabilidad caracterizada por y y por $u_c(y)$ es proximadamente normal y el número de grados de

libertad efectivos de $u_c(y)$ es grande. Cuando este es el caso, que ocurre frecuentemente en la práctica, es posible suponer que al tomar $k = 2$ se obtiene un intervalo cuyo nivel de confianza es de aproximadamente 95 por ciento, y que al elegir $k = 3$ se obtiene un intervalo que tiene un nivel de confianza de aproximadamente el 99 por ciento.

NOTA

Un método para estimar el número efectivo de grados de libertad de $u_c(y)$ se encuentra en G.4. La Tabla G.2 del anexo G puede entonces utilizarse como auxiliar al decidir si esta solución es apropiada para una medición en particular (véase G.6.6).

7. Expresión de la incertidumbre

7.1 Guía general

7.1.1 En general, conforme se avanza en la jerarquía de las mediciones, se requieren más detalles acerca de cómo se obtuvieron el resultado de una medición y su incertidumbre. No obstante, en cualquier nivel de dicha jerarquía, incluyendo las actividades comerciales y reglamentarias en el mercado, trabajos de ingeniería en la industria, instalaciones de calibraciones no primarias, investigación y desarrollo industrial, investigación académica, laboratorios de calibración y patrones primarios industriales, los laboratorios primarios nacionales y el BIPM, debería estar disponible toda la información necesaria para la reevaluación de la medición para quienes pudieran necesitarla. La diferencia primordial es que en los niveles más bajos de la cadena jerárquica, la mayor parte de la información puede estar disponible en informes publicados de calibración y prueba del sistema, especificaciones de prueba, certificados de prueba y calibración, manuales de instrucciones, normas internacionales y nacionales y reglamentos locales.

7.1.2 Cuando se proporcionan los detalles de la medición, incluyendo el método para la evaluación de la incertidumbre, haciendo referencia a documentos publicados, como es frecuente en casos cuando los resultados de la calibración se declaran en un certificado, es imperativo que estas publicaciones se mantengan actualizadas de manera que sean consistentes con los procedimientos de medición que realmente están utilizándose.

7.1.3 En la industria y el comercio cada día se hacen numerosas mediciones sin un informe explícito de la incertidumbre. Sin embargo, muchas se efectúan con instrumentos sujetos a calibraciones periódicas o a inspecciones legales. Si se sabe que los instrumentos trabajan en conformidad a sus especificaciones o a los documentos normativos existentes que puedan aplicarse a ellos,

entonces las incertidumbres de sus indicaciones pueden inferirse a partir de esas especificaciones o de esos documentos normativos.

7.1.4 Aunque en la práctica la cantidad de información necesaria para documentar el resultado de una medición depende del uso pretendido, el principio básico de lo que se requiere permanece sin cambio: cuando se informa el resultado de una medición y su incertidumbre, es preferible equivocarse suministrando demasiada información en lugar de suministrarla incompleta. Por ejemplo, se puede:

a) describir claramente los métodos utilizados para calcular el resultado de la medición y su incertidumbre a partir de las observaciones experimentales y los datos de entrada utilizados;
b) hacer listas de todos las componentes de la incertidumbre y documentar totalmente sobre cómo fueron evaluadas;
c) presentar los análisis de datos en una manera tal que cada uno de sus pasos importantes puedan seguirse de manera sencilla y el cálculo del resultado informado pueda repetirse de manera independiente, en caso de ser necesario.
d) proporcionar todas las correcciones y las constantes utilizadas en el análisis, así como las fuentes de cada una de ellas.

Una prueba de la lista que antecede es preguntarse "¿He proporcionado suficiente información, de una manera suficientemente clara, de tal manera que el resultado pueda actualizarse en el futuro en caso de que se tenga disponible nueva información?"

7.2 Guía específica

7.2.1 Cuando se informa el resultado de una medición y cuando la medida de la incertidumbre es la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$, se debe:

a) dar una descripción completa de como se define el mensurando Y,
b) dar el valor estimado y del mensurando Y y su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$; dando siempre las unidades tanto de y como de $u_c(y)$;
c) incluir la incertidumbre estándar combinada relativa $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$, cuando sea apropiado.

d) darle información solicitada en 7.2.7 o hacer referencia a un documento publicado que la contenga.

Si se juzgara útil para los posibles usuarios de los resultados de las mediciones, por ejemplo, para ayudar en cálculos futuros de factores de cobertura o para asistir en la comprensión de las mediciones, se puede indicar:

– los grados de libertad efectivos estimados ν_{eff}. (véase G.4);

– las incertidumbres estándar combinadas de Tipo A y de Tipo B, $u_{\mathrm{cA}}(y)$ y $u_{\mathrm{cB}}(y)$, respectivamente, y sus grados de libertad efectivos estimados ν_{effA} y ν_{effB} (véase G.4.1 , nota 3).

7.2.2 Cuando la medida de la incertidumbre es $u_c(y)$, es preferible declarar el resultado numérico de la medición en una de las cuatro maneras siguientes, con el propósito de evitar malas interpretaciones. (Se supone que la magnitud cuyo valor se está informando es, nominalmente, una masa patrón m_s , de 100 g; las palabras que se encuentran entre paréntesis pueden omitirse por brevedad si u_c se define en cualquier parte del documento que informa del resultado).

1. "m_s = 100,021 47 g , con (una incertidumbre estándar combinada) u_c = 0,35 mg ".

2. "m_s = 100,021 47(35) g , donde el número entre paréntesis es el valor numérico de la incertidumbre estándar combinada u_c referido a los últimos dígitos correspondientes del resultado citado" .

3. "m_s = 100,021 47(0,000 35) g , donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c expresado en la unidad del resultado citado" .

4. "m_s = (100,021 47 $\pm$ 0,000 35) g , donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada) u_c y no un intervalo de confianza" .

NOTA

El formato que usa el símbolo ± debe evitarse cada vez que sea posible ya que, tradicionalmente, se le ha usado para indicar, un intervalo que corresponde a un alto nivel de confianza y puede, por tanto, ser confundida con la incertidumbre expandida

(véase 7.2.4). Aún más, aunque el propósito de la advertencia en 4) es prevenir tal confusión, escribir $Y = y \pm u_c(y)$ puede seguir mal interpretándose al hacer creer que implica, especialmente si la advertencia es accidentalmente omitida, que se pretende una incertidumbre expandida con $k = 1$ y que el intervalo $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ tiene un nivel de confianza especificado p, es decir, aquel asociado con la distribución normal (véase G.1.3). Como se indica en 6.3.2 en el anexo G, la interpretación de $u_c(y)$ en este sentido usualmente es difícil de justificar.

7.2.3 Cuando se informen los resultados de una medición y cuando la medida de la incertidumbre sea la incertidumbre expandida $U = ku_c(y)$, se debe:

a) dar una descripción completa de como se define el mensurando Y;

b) declarar el resultado de la medición como $Y = y \pm U$ y dar las unidades de y y de U

c) incluir la incertidumbre expandida relativa $U/|y|$, $|y| \neq 0$, cuando sea apropiado;

d) dar el valor de k usado para obtener U [o, para conveniencia del usuario del resultado, dar tanto k, como $u_c(y)$]

e) dar el nivel de confianza aproximado asociado con el intervalo $Y = y \pm U$ y declarar cómo se determinó.

f) dar la información mencionada en 7.2.7 o hacer referencia a un documento publicado que la contenga.

7.2.4 Cuando la medida de la incertidumbre es U, es preferible, para máxima claridad, declarar el resultado numérico de la medición como en el ejemplo siguiente. (Las palabras que se encuentran entre paréntesis pueden omitirse por brevedad si U, u_c y k se definen en cualquier parte del documento que informa el resultado.)

"$m_s = (100{,}021\ 47 \pm 0{,}000\ 79)\ g$, donde el número que sigue al símbolo $\pm$ es el valor numérico de (una incertidumbre expandida) $U = ku_c$, con U determinada a partir de (una incertidumbre estándar combinada) $u_c = 0{,}35$ mg y (un factor de cobertura) $k = 2{,}26$, basada en Ia

distribución t para $\nu = 9$ grados de libertad, y define un intervalo que se estima tiene un nivel de confianza de 95 por ciento" .

7.2.5 Si una medición determina simultáneamente a más de un mensurando, o sea, si suministra dos o más estimados de salida y_i (véase H.2, H.3 y H.4), entonces, además de dar y_i y $u_c(y_i)$, se debe dar los elementos matriciales de la covarianza $u(y_i, y_j)$ o los elementos $r(y_i, y_j)$ de la **matriz de coeficientes de correlación** (C.3.6, nota 2) (y preferiblemente ambos).

7.2.6 Los valores numéricos de los estimados de y y de su incertidumbre estándar $u_c(y)$ o su incertidumbre expandida U no deben darse con un número excesivo de dígitos. Usualmente es suficiente expresar $u_c(y)$ y U [así como las incertidumbres estándar $u(x_i)$ de las estimaciones de entrada x_i], con a lo más dos dígitos significativos, aunque en algunos casos puede ser necesario retener dígitos adicionales para evitar errores de redondeo en cálculos subsecuentes.

Al informar los resultados finales, puede ser algunas veces apropiado redondear incertidumbres al dígito superior en lugar de al dígito más cercano. Por ejemplo, $u_c(y)$ = 10,47 mΩ puede redondearse hasta 11 mΩ . Sin embargo, el sentido común deberá prevalecer y un valor como $u(x_i)$ = 28,05 kHz debe redondearse a 28 kHz . Las estimaciones de entrada y salida deben redondearse para ser consistentes con sus incertidumbres; por ejemplo, si y = 10,057 62 Ω con $u_c(y)$ = 27 mΩ, entonces y debe redondearse a 10,058 Ω. Los coeficientes de correlación deberían darse con una exactitud de tres dígitos si sus valores absolutos son cercanos a la unidad.

7.2.7 En el informe detallado que describe cómo fueron obtenidos el resultado de una medición y su incertidumbre, se deben seguir las recomendaciones de 7.1.4 y por tanto:

a) dar el valor para cada estimación de entrada x_i y su incertidumbre estándar $u(x_i)$; dar, además, una descripción de cómo fueron obtenidas;

b) dar las covarianzas estimadas o coeficientes de correlación estimados (preferentemente ambos) asociados con todas las estimaciones de entrada que están correlacionadas y los métodos utilizados para obtenerlas;

c) dar los grados de libertad para la incertidumbre estándar de cada estimación de entrada y el método utilizado para obtenerlo;

d) dar la relación funcional $Y = f(X_1 , X_2 , ... X_N)$ y, cuando se considere útil, las derivadas parciales o coeficientes de sensibilidad $\partial f/\partial x_i$. Si alguno de estos coeficientes se ha obtenido experimentalmente, debe incluirse también, su proceso de obtención.

NOTA

Dado que la relación funcional f puede ser extremadamente compleja o puede no existir explícitamente sino únicamente como un programa de computadora, puede no ser siempre posible dar f y su derivadas. La función f puede ser entonces descrita en términos generales o el programa usado puede ser citado mediante una referencia apropiada.

En tales casos, es importante que quede claro como fueron obtenidos el estimado y, del mensurando Y así como su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$.

8. Resumen del procedimiento para la evaluación y expresión de la incertidumbre

Los pasos a seguir para evaluar y expresar Ia incertidumbre de los resultados de una medición como se presentan en la **Guía** se pueden resumir como sigue:

1. Expresar matemáticamente la relación entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las cuales depende $Y = f(X_1, X_2, \ldots X_N)$. La función *f* deberá contener cualquier magnitud, incluyendo todas las correcciones y factores de corrección que puedan contribuir como una componente significativa de incertidumbre al resultado de la medición (véase 4. l. 1 y 4.1.2).

2. Determinar x_i , el valor estimado de la magnitud de entrada X_i , ya sea sobre la base del análisis estadístico de una serie de observaciones o por otro método (véase 4.1.3).

3. Evaluar la *incertidumbre estándar* $u(x_i)$ de cada estimación de entrada x_i . Para la estimación de una entrada obtenida a partir del análisis estadístico de una serie de observaciones, la incertidumbre estándar se evalúa como se describió en 4.2 (*evaluación de Tipo A de incertidumbre estándar*). Para el caso de una estimación obtenida por otros métodos, la incertidumbre estándar $u(x_i)$ se evalúa como se describe en 4.3 (*evaluación de Tipo B de incertidumbre estándar).*

4. Evaluar las covarianzas asociadas con cualesquiera estimaciones de entrada que estén correlacionadas (véase 5.2)

5. Calcular el resultado de la medición, esto es, la estimación y del mensurando Y, a partir de la relación funcional f usando, para las magnitudes de entrada X_i, las estimaciones x_i obtenidas en el paso 2 (véase 4.1.4).

6. Determinar la *incertidumbre estándar combinada* $u_c(y)$ del resultado de la medición y a partir de las incertidumbres estándar y las covarianzas asociadas con las estimaciones de entrada x_i, como se describe en el capítulo 5. Si la medición determina simultáneamente más de un resultado, calcule sus covarianzas (véase 7.2.,5, H.2, H.3 y H.4).

7. Si es necesario declarar una *incertidumbre expandida* U, cuyo propósito sea establecer un intervalo de $y - U$ hasta $y + U$ que pueda esperarse abarque una fracción suficientemente grande de la distribución de los valores que razonablemente puedan atribuirse al mensurando Y, multiplicando la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ por un factor de cobertura k, típicamente en el intervalo de 2 a 3, para obtener $U = ku_c(y)$. Selecciona k sobre la base del nivel de confianza requerido para el intervalo (véase 6.2, 6.3 y especialmente el anexo G, en donde se analiza la selección de un valor de k que produce un intervalo que tiene un nivel de confianza próximo a un valor especificado).

8. Informar del resultado de la medición y junto con su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ o su incertidumbre expandida U como se analizó en 7.2.1 y 7.2.3; utilizar alguno de los formatos recomendados en 7.2.2 y 7.2.4. Describir, como también se señala en la capítulo 7, cómo se obtuvieron y y $u_c(y)$ o U .

Anexo "A"

Recomendaciones del Grupo de Trabajo y del CIPM

A.1 Recomendación INC-1 (1980)

El Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres (véase el Prefacio) fue convocado en octubre de 1980 por el Bureau Intemacional de Pesas y Medidas (BIPM) en respuesta a una solicitud del Comité Intemacional de Pesas y Medidas (CIPM). Este Grupo preparó un informe detallado, para someterlo a consideración del CIPM, el cual dio lugar a la Recomendación INC-1 (1980) [2].

La traducción al español de la versión inglesa de esta Recomendación se da en 0.7 de esta **Guía** en tanto que el texto en francés, el cual es de mayor autoridad, se presenta a continuación [2]: Expression des incertitudes experimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1 . L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusiers composantes qui peuvent étre groupées en deux categories d'aprés la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

A. celles qui sont évaluées á l'aide de méthodes statistiques,

B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractére aléatoire- ou «systématique» utilisé anterieurement pour classer les incertitudes . L'expresion «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2. Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écarts-types» estimes s_i) et les nombres v_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3. Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4 . L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d' «écart-types».

5. Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée

A.2 Recomendación 1 (CI-1981)

El CIPM revisó el informe que le envió el Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres y adoptó la siguiente recomendación en su 70ª reunión llevada a cabo en octubre de 1981 [3]:

Recomendación 1 (CI-1981)

Expresión de incertidumbres experimentales

El Comité Intemacional de Pesas y Medidas

considerando:

– la necesidad encontrar un acuerdo sobre la manera de expresar la incertidumbre en metrología,
– el esfuerzo que muchas organizaciones han hecho por esto por muchos años,
– el estimulante progreso hecho para encontrar una solución aceptable, que ha resultado de las discusiones del Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres que se reunió en el BIPM en 1980,

reconoce:

– que las propuestas del Grupo de Trabajo pueden formar las bases de un posible acuerdo sobre la expresión de incertidumbres,

recomienda:

– que las propuestas del Grupo de Trabajo se difundan ampliamente;
– que el BIPM intente aplicar los principios en ese respecto a las comparaciones internacionales llevadas a cabo bajo sus auspicios en los años venideros;
– que otras organizaciones interesadas se sientan exhortadas a examinar y probar estas propuestas y permitan al BIPM conocer sus comentarios;
– que después de dos o tres años el BIPM devuelva un informe sobre la aplicación de estas propuestas.

A.3 Recomendación 1 (CI-1986)

El CIPM consideró adicionalmente la importancia de la expresión de incertidumbres en su 75ª reunión llevada a cabo en octubre de 1986 y adoptó la recomendación siguiente [4]:

Recomendación 1 (CI-1986)

Expresión de incertidumbres en los trabajos
llevados a cabo bajo los auspicios del CIPM

El Comité Intemacional de Pesas y Medidas

considerando:

la adopción, por parte del Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres, de la Recomendación INC-1 (1980) y la adopción de la Recomendación 1 (CI-1981) por el CIPM, considerando que a ciertos miembros de los Comités Consultivos les agradaría una explicación de esta Recomendación para los propósitos de trabajos dentro de su campo de interés, especialmente para comparaciones internacionales.

reconoce:

que el párrafo 5 de la Recomendación INC-1 (1980) relativo a aplicaciones particulares, especialmente a aquellas que tienen importancia comercial, está siendo considerada ahora por un grupo de trabajo de la Organización Internacional de Normalización (ISO), con miembros de ISO, OIML e IEC con la concurrencia y cooperación del CIPM.

solicita:

que el párrafo 4 de la Recomendación INC-1 (1980) sea aplicado por todos quienes participen en dar los resultados de todas las comparaciones internacionales u otro trabajo hecho bajo los auspicios del CIPM y de los Comités Consultivos y que la incertidumbre combinada de las incertidumbres de Tipo A y de Tipo B se dé en términos de una *desviación estándar*.

Anexo "B"

Términos metrológicos generales

B.1 Fuente de las definiciones

Las definiciones de los términos metrológicos generales relevantes para esta **Guía** que se presentan a continuación se tomaron del *Vocabulario internacional de términos generales y básicos en metrología* (abreviado VIM), segunda edición [6], publicado por la Organización Internacional para la Normalización (ISO), a nombre de las siete organizaciones que lo han patrocinado y que nominaron a los expertos que la prepararon: el Bureau Internacional de Pesas y Medidas (BIPM), la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC), la Federación Internacional de Quimica Clínica (IFCC), ISO, la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (IUPAP), y la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML). El VIM debe ser la primera fuente consultada para las definiciones de los términos no incluidos aquí o en el texto.

NOTA

Algunos términos y conceptos estadísticos básicos se dan en el anexo C, mientras que los términos "valor verdadero", "error", e "incertidumbre" se analizan más a fondo en el anexo D.

B.2 Definiciones

Tal y como se hizo en el capítulo 2, en las definiciones que siguen, el uso de paréntesis alrededor de ciertas palabras de algunos términos significa que las palabras pueden omitirse si no hay riesgo de que su omisión cause confusión.

Los términos en negritas en algunas notas son términos metrológicos adicionales definidos en esas notas, ya sea explícita o implícitamente (véase referencia [6]).

B.2.1 Magnitud (mensurable) [VIM 1.1]

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que es susceptible de ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente.

NOTAS

1. *El término "magnitud" puede referirse a una magnitud en el sentido general [véase ejemplos a)] o a una magnitud particular [véase ejemplo b)] .*

EJEMPLOS

a) *magnitudes en sentido general: longitud, tiempo, masa, temperatura, resistencia eléctrica, concentración en magnitud de sustancia,*

b) *magnitudes particulares:*

- *longitud de una varilla determinada*
- *resistencia eléctrica de un hilo conductor determinado*
- *concentración de magnitud de sustancia de etanol en una muestra determinada de vino.*

2. *Las magnitudes que pueden clasificarse unas con respecto a otras en orden creciente (o decreciente) de una magnitud se denominan magnitudes de la misma naturaleza.*

3. *Las magnitudes de la misma naturaleza. pueden agruparse juntas en categorías de magnitudes, por ejemplo:*

- *trabajo, calor, energía*
- *espesor, circunferencia, longitud de onda.*

4. *Los símbolos de las magnitudes se dan en ISO 31.*

B.2.2 Valor (de una magnitud) [VIM 1.18]

Dimensión de una magnitud particular, generalmente en forma de una unidad de medida multiplicada por un número

EJEMPLOS

a) *longitud de una varilla:* *5,34 m ó 534 cm ;*

b) *masa de un cuerpo:* *0,152 kg ó 152 g ;*

c) *magnitud de sustancia de una muestra de agua (H_2O):* *0,012 mol ó 12 mmol .*

NOTAS

1. *El valor de una magnitud puede ser positivo, negativo o cero.*
2. *El valor de una magnitud puede expresarse en más de una forma.*
3. *Los valores de magnitudes de dimensión uno se expresan generalmente como números puros.*
4. *Una magnitud que no puede ser expresada como una unidad de medida multiplicada por un número se puede expresar con referencia a una escala convencional o a un procedimiento de medición especificado o de ambos.*

B.2.3 valor verdadero (de una magnitud) [VIM 1.19]

Valor compatible con la definición de una magnitud dada.

NOTAS

1. *Es un valor que se obtendrá por una medición perfecta.*
2. *Los valores verdaderos son por naturaleza indeterminados.*
3. *Es mejor utilizar en conjunción con "valor verdadero" el artículo indefinido "un" que el artículo definido "el" porque el valor verdadero puede tener varios valores que se correspondan con a definición de una magnitud particular dada.*

Comentario de la **Guía**: véase anexo D, en particular D.3.5, para conocer las razones del por qué el término "valor verdadero" no se usa en esta **Guía** y por qué los términos "valor verdadero de un mensurando" (o de una magnitud) y "valor de un mensurando" (o de una magnitud) se consideran como equivalentes.

B.2.4 Valor convencionalmente verdadero (de una magnitud) [VIM 1.20]

Valor atribuido a una magnitud particular y aceptada algunas veces por convención que tiene una incertidumbre apropiada para un propósito dado.

EJEMPLOS

a) en un lugar dado, el valor atribuído a la magnitud realizada por un patrón de referencia puede ser tomado como un valor convencionalmente verdadero.

b) el valor de la constante de Avogadro: 6,022 136 7 x 10^{23} mol^{-1} . recomendado por CODATA (1986)

NOTAS

1. *El "valor convencionalmente verdadero" es denominado a veces* ***valor asignado, mejor estimación del valor, valor convencional*** *o* ***valor de referencia****. En este sentido el término "valor de referencia" no debe confundirse con el mismo término utilizado en el sentido de la Nota de [VIM] 5.7.*

2. *Frecuentemente se utiliza un gran número de resultados de mediciones de una magnitud para establecer un valor convencionalmente verdadero.*

Comentario de la **Guía**: véase en la **Guía** el comentario de B.2.3.

B.2.5 Medición [VIM 2.1]

Conjunto de operaciones que tienen por objetivo determinar un valor de una magnitud

NOTA

Las operaciones pueden ser realizadas automáticamente.

B.2.6 Principio de medición [VIM 2.3]

Base científica de una medición

EJEMPLOS

a) el efecto termoeléctrico aplicado a la medición de temperatura;

b) el efecto Josephson aplicado a la medición de la diferencia de potencial eléctrico;

c) el efecto Doppler aplicado a la medición de velocidad;

d) el efecto Raman aplicado a la medición del número de onda de vibraciones moleculares.

B.2.7 Método de medición [VIM 2.4]

Secuencia lógica de operaciones, descrita de una forma genérica, utilizada en la ejecución de las mediciones

NOTA

Los métodos de medición pueden ser calificados de diversas formas tales como :

– *método de sustitución*

– *método diferencial*

– *método de cero*

B.2.8 procedimiento de medición [VIM 2.5]

conjunto de operaciones, descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares según a un método dado

NOTA

Un procedimiento de medición es generalmente descrito en un documento que a menudo es llamado "procedimiento de medición" (o ***método de medición****) y que da suficientes detalles para que un operador puede efectuar una medición sin necesidad de información adicional.*

B.2.9 Mensurando [VIM 2.6]

Magnitud particular sujeta a medición

EJEMPLO

presión de vapor de una muestra dada de agua a 20 °C .

NOTA

La especificación de un mensurando puede requerir indicaciones relativas a magnitudes tales como el tiempo, la temperatura y la presión.

B.2.10 Magnitud de influencia [VIM 2.7]

Magnitud que no es el mensurando pero que afecta el resultado de la medición

EJEMPLOS

a) temperatura de un micrómetro utilizado para medir una longitud,

b) frecuencia en la medición de la amplitud de una diferencia de potencial eléctrica alterna,

c) *concentración de bilirrubina en la medición de la concentración de hemoglobina en una muestra de plasma sanguíneo humano.*

Comentario de la **Guía**: Se entiende que la definición de magnitud de influencia incluye valores asociados con patrones de medición, materiales de referencia, y datos de referencia de los cuales puede depender el resultado de una medición, incluye también fenómenos tales como fluctuaciones a corto plazo en instrumentos de medición y magnitudes como temperatura ambiente, presión barométrica y humedad.

B.2.11 Resultado de una medición [VIM 3.1]

Valor atribuido a un mensurando, obtenido por medición

NOTAS

1. *Cuando se da un resultado, se indicará claramente si se refiere a:*
   - *la indicación*
   - *el resultado sin corregir*
   - *el resultado corregido*

   y si aquel proviene de una media obtenida a partir de varios valores
2. *Una expresión completa del resultado de una medición incluye información sobre la incertidumbre de medición.*

B.2.12 Resultado sin corregir [VIM 3.3]

Resultado de una medición antes de la corrección del error sistemático

B.2.13 Resultado corregido [VIM 3.4]

Resultado de una medición después de la corrección del error sistemático

B.2.14 Exactitud de la medición [VIM 3.5]

Grado de concordancia entre el resultado de una medición y un valor verdadero del mensurando

NOTAS

1. *el concepto "exactitud" es cualitativo.*
2. *el término precisión no debe utilizarse por "exactitud".*

Comentario de la Guía: véase en la Guía el comentario de B.2.3.

B.2.15 Repetibilidad (de los resultados de las mediciones) [VIM 3.6]

Grado de concordancia entre resultados de sucesivas mediciones del mismo mensurando, mediciones efectuadas con aplicación de la totalidad de las mismas condiciones de medición.

NOTAS

1. *Estas condiciones se denominan* ***condiciones de repetibilidad.***
2. *Las condiciones de repetibilidad comprenden:*
   - *el mismo procedimiento de medición*
   - *el mismo observador*
   - *el mismo instrumento de medición, utilizado en las mismas condiciones.*
   - *el mismo lugar*
   - *repetición durante un corto período de tiempo.*
3. *La repetibilidad puede expresarse cuantitativamente por medio de las características de dispersión de los resultados.*

B.2.16 Reproducibilidad (de los resultados de las mediciones) [VIM 3.7]

Grado de concordancia entre los resultados de las mediciones del mismo mensurando efectuadas bajo diferentes condiciones de medición.

NOTAS

1. *Para que una expresión de reproducibilidad sea válida, es necesario especificar las condiciones que han variado.*
2. *Las condiciones variables pueden comprender.*
   - *principio de medición*
   - *método de medición*
   - *observador*
   - *instrumento de medición*
   - *patrón de referencia*
   - *ubicación*
   - *condiciones de utilización*
   - *tiempo.*
3. *La reproducibilidad puede expresarse cuantitativamente por medio de las características de la dispersión de los resultados.*
4. *Los resultados aquí considerados son habitualmente, resultados corregidos.*

B.2.17 Desviación estándar experimental [VIM 3.8]

Para una serie de *n* mediciones de un mismo mensurando, es la magnitud $s(q_k)$ que caracteriza la dispersión de los resultados, dada por la fórmula:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2}{n-1}}$$

en donde q_k , es el resultado de la *k*-ésima medición y $\bar{q}$ es la media aritmética de los *n* resultados considerados

NOTAS

1. *Considerando la serie de n valores corno una muestra de una distribución,* $\bar{q}$ *es un estimador sin sesgo de la media* μ_q *, y* $s^2(q_k)$ *es una estimador sin sesgo de la varianza* σ^2 *de dicha distribución.*
2. *La expresión* $s(q_k)/\sqrt{n}$ *es una estimación de la desviación estándar de la distribución de* $\bar{q}$ *y se denomina la* ***desviación estándar experimental de la media.***
3. *La "desviación estándar experimental de la media" en ocasiones se denomina, incorrectamente,* ***error estándar de la media****.*

Comentario de la **Guía**: Algunos de los símbolos usados en el VIM han sido cambiados para asegurar la consistencia con la notación usada en el capítulo 4.2 de esta **Guía**.

B.2.18 Incertidumbre (de medición) [VIM 3.9]

Parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que podrían razonablemente ser atribuidos al mensurando.

NOTAS

1. *El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación estándar (o un múltiplo de esta), o el semiancho de un intervalo de un nivel de confianza determinado.*
2. *La incertidumbre de medición comprende en general, varios componentes. Algunas pueden evaluarse a partir de la distribución estadística de los resultados de series de mediciones y pueden caracterizarse por sus desviaciones estándar experimentales. Las componentes que también pueden caracterizarse por desviaciones estándar, se evalúan asumiendo distribuciones de probabilidad basadas en la experiencia adquirida o en otras informaciones.*
3. *Se entiende que el resultado de la medición es la mejor estimación del valor del mensurando, y que todas las componentes de la incertidumbre, incluyendo las que provienen de efectos sistemáticos, tales como las componentes asociadas a las correcciones y a los patrones de referencia, contribuyen a la dispersión.*

Comentario de la **Guía**: Se hace notar en el VIM que esta definición y las notas son idénticas a las que están en esta **Guía** (véase 2.2.3).

B.2.19 Error (de medición) [VIM 3.10]

Resultado de una medición menos un valor verdadero del mensurando

NOTAS

1. *Considerando que un valor verdadero no puede ser determinado, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero (véase [VIM] 1.19 [B.2.3] y 1.20 [B.2.4]).*
2 . *Cuando sea necesario hacer la distinción entre "error" y "error relativo", el primero es a veces denominado* ***error absoluto de medición****. No hay que confundirlo con el* ***valor absoluto del error****, que es el módulo del error.*

Comentario de la **Guía**: Si el resultado de una medición depende de los valores de otras magnitudes diferentes al mensurando, los errores de los valores medidos de estas magnitudes contribuyen al error del resultado de la medición. Véase en la **Guía** el comentario de B.2.22 y B.2.3.

B.2.20 Error relativo [VIM 3.12]

Relación entre el error de medición dividido y un valor verdadero del mensurando

NOTA

Considerando que un valor verdadero no puede determinarse, en la práctica se utiliza un valor convencionalmente verdadero (véase [VIM] 1.19 [B.2.3] y 1.20 [B.2.4]).

Comentario de la **Guía**: véase en la **Guía** el comentario de B.2.3.

B.2.21 Error aleatorio [VIM 3.13]

Resultado de una medición menos la media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando, efectuadas bajo condiciones de repetibilidad

NOTAS

1. *El error aleatorio es igual al error menos el error sistemático.*
2. *Como no pueden hacerse más que un número finito de mediciones, solamente es posible determinar una estimación del error aleatorio.*

Comentario de la **Guía**: véase en la **Guía** el comentario de B.2.22.

B.2.22 Error sistemático [VIM 3.14]

Media que resultaría de un número infinito de mediciones del mismo mensurando, efectuadas bajo condiciones de repetibilidad, menos un valor verdadero del mensurando.

NOTAS

1. *El error sistemático es igual al error menos el error aleatorio.*
2. *El valor verdadero, como el error sistemático y sus causas, no pueden ser conocidos completamente.*
3. *Para un instrumento de medición, véase "error de justeza" ([VM 5.25),*

Comentario de la **Guía**: Puede considerarse frecuentemente que el error del resultado de una medición (véase B.2.19) surge debido a varios efectos sistemáticos y aleatorios que contribuyen con componentes individuales de error al error del resultado. Véase también en la **Guía** el comentario de B.2.19 y B.2.3.

B.2.23 Corrección [VIM 3.15]

Valor agregado algebraicamente al resultado no corregido de una medición para compensar un error sistemático

NOTAS

1. *La corrección es igual al negativo del error sistemático estimado.*
2. *Puesto que el error sistemático no puede conocerse perfectamente, la compensación no puede ser completa.*

B.2.24 Factor de corrección [VIM 3.16]

Factor numérico por el que se multiplica el resultado no corregido de una medición para compensar un error sistemático

NOTA

Puesto que el error sistemático no puede conocerse perfectamente, la compensación no puede ser completa.

Anexo "C"

Términos y conceptos estadísticos básicos

C.1 Fuente de las definiciones

Las definiciones de los términos estadísticos básicos dados en este anexo están tomados de la Norma Internacional ISO 3534-1 [7]. Esta debe ser la primera fuente consultada para las definiciones de términos que no se incluyan aquí. Algunos de estos términos y los conceptos en que se sustentan se discuten en C.3 luego de la presentación de sus definiciones formales en C.2 con la finalidad de facilitar el posterior uso de esta **Guía**. Sin embargo, C.3, que también incluye las definiciones de algunos términos relacionados, no está basada directamente sobre ISO 3534-1.

C.2 Definiciones

Al igual que en el capítulo 2 y en el anexo B, el encerrar ciertas palabras de algunos términos entre paréntesis significa que las palabras podrían omitirse si su ausencia no es causa de confusión.

Los términos C.2.1 a C.2.14 se definen en términos de las propiedades de las poblaciones. Las definiciones de los términos C.2.15 a C.2.31 están relacionadas a un conjunto de observaciones (véase referencia [7]).

C.2.1 Probabilidad [ISO 3534-1, 1.1]

Un número real en la escala de 0 a 1 asociado a un evento aleatorio.

NOTA

Este puede estar relacionado a una frecuencia relativa de ocurrencia de un evento a largo plazo o a un grado de credibilidad de que un evento ocurrirá. Para un alto grado de credibilidad, la probabilidad es cercana a 1.

C.2.2 Variable aleatoria [ISO 3534-1, 1.2]

Una variable que puede tomar cualquiera de los valores de un conjunto específico de valores y con los cuales está asociada una *distribución de probabilidad* ([ISO 3534-1] 1.3 [C.2.3]).

NOTAS

1. *Una variable aleatoria que puede tomar sólo valores aislados se conoce como "discreta". Una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo finito o infinito se conoce como "continua".*
2. *La probabilidad de un evento A se denota como Pr(A) o P(A).*

Comentario de la Guía: El símbolo Pr(A) se usa en esta Guía en lugar del símbolo $P_r(A)$ usado en ISO 3534-1.

C.2.3 Distribución de probabilidad (de una variable aleatoria) [ISO 3534-1, 1.3]

Una función que da la probabilidad de que una variable aleatoria tome cualquier valor dado o pertenezca a un conjunto dado de valores.

NOTA

La probabilidad sobre el conjunto total de valores de la variable aleatoria es igual a 1.

C.2.4 Función de distribución [ISO 3534-1, 1.4]

Una función que da, para cada valor de x, la probabilidad de que la variable aleatoria X sea menor o igual que *x*:

$$F(x) = Pr\,(X \leq x)$$

C.2.5 Función de densidad de probabilidad (para una variable aleatoria continua) [ISO 3534-1, 1.5]

La derivada (cuando existe) de la función de distribución:

$$f(x) = dF\,(x)/dx$$

NOTA

$f(x)dx$ es el "elemento de probabilidad":

$$f(x)\mathrm{d}x = \Pr(x < \mathrm{X} < x + \mathrm{d}x)$$

C.2.6 Función masa de probabilidad [ISO 3534-1, 1.6]

Una función que da, para cada valor x_i de una variable aleatoria discreta X, la probabilidad p_i de que la variable aleatoria sea igual a x_i :

$$p_i = \Pr\,(\mathrm{X} = x_i)$$

C.2.7 Parámetro [ISO 3534-1, 1.12]

Una magnitud usada para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

C.2.8 Correlación [ISO 3534-1, 1.13]

La relación entre dos o varias variables aleatorias dentro de una distribución de dos o más variables aleatorias.

NOTA

La mayoría de las medidas estadísticas de correlación miden únicamente la linealidad de la relación.

C.2.9 Esperanza (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad); valor esperado; media [ISO 3534-1. 1.18]

1. Para una variable aleatoria discreta X que toma valores x_i, con probabilidades p_i, la esperanza, si existe, es

$$\mu = E(\mathrm{X}) = \sum p_i x_i$$

en la cual la sumatoria corre sobre todos los valores x_i que puede tomar X.

2. Para una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$, la esperanza, si existe, es

$$\mu = E(X) = \int x\, f(x)\, dx$$

en donde la integral se extiende sobre el (los) intervalo(s) de variación de X.

C.2.10 Variable aleatoria centrada [ISO 3534-1, 1.21]

Una variable aleatoria para la cual la esperanza es cero.

NOTA

Si la variable aleatoria X *tiene una esperanza igual a* μ*, la variable aleatoria centrada correspondiente es* $(X - \mu)$.

C.2.11 Varianza (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad) [ISO 3534-1, 1.22]

La esperanza del cuadrado de la *variable aleatoria centrada* ([ISO 3534-1] 1.21 [C.2.10]):

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

C.2.12 Desviación estándar (de una variable aleatoria o de una distribución de probabilidad) [ISO 3534-1,1.23]

La raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

C.2.13 Momento central[1] de orden q [ISO 3534-1, 1.28]

En una distribución univariada, la esperanza de la q-ésima potencia de la variable aleatoria centrada $(X - \mu)$:

$$E[(X - \mu)^q]$$

NOTA

El momento central de orden 2 es la varianza ([ISO 3534-1) 1.22 [C.2.11]) de la variable aleatoria X.

C.2.14 Distribución normal; distribución de Laplace-Gauss [ISO 3534-1, 1.37]

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua X, cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right]$$

para $-\infty < x < +\infty$.

NOTA

μ es la esperanza y σ es la desviación estándar de la distribución normal.

C.2.15 Característica [ISO 3534-1, 2.2]

Una propiedad que ayuda a identificar o diferenciar entre objetos de una población dada.

NOTA

La característica puede ser cuantitativa (por variables) o cualitativa (por atributos).

C.2.16 Población [ISO 3534-1, 2.3]

La totalidad de objetos bajo consideración.

NOTA

En el caso de una variable aleatoria, se considera que la distribución de probabilidad ([ISO 3534-1] 1.3 [C.2.3]) define la población de esa variable.

C.2.17 Frecuencia [ISO 3534-1, 2.1 1]

El número de ocurrencias de un tipo dado de evento o el número de observaciones que caen dentro de una clase específica.

C.2.18 Distribución de frecuencia [ISO 3534-1, 2.15]

La relación empírica entre los valores de una característica y sus frecuencias o sus frecuencias relativas.

NOTA

La distribución puede presentarse gráficamente como un histograma (ISO 3534-1] 2.17), diagrama de barras (ISO 3534-1] 2.18), polígono de frecuencias acumulativo ([ISO 3534-1] 2.19), o como una tabla de dos vías ([ISO 3534-1] 2.22).

C.2.19 Media aritmética; promedio [ISO 3534-1, 2.26]

La suma de valores dividida por el número de valores

NOTAS

1. *El término "media" se usa generalmente cuando se hace referencia a un parámetro de población y el término "promedio" cuando se hace referencia al resultado de los cálculos sobre datos obtenidos en una muestra.*
2. *El promedio de una muestra simple aleatoria tomada de una población es un estimador no sesgado de la media de esta población. Sin embargo, suelen usarse otros estimadores, tales como la media geométrico o armónica, o la mediana o moda.*

C.2.20 Varianza [ISO 3534-1, 2.33]

Una medida de la dispersión, la cual es la suma de los cuadrados de las desviaciones de los datos con respecto de su promedio, dividida por una magnitud igual al número de las observaciones menos uno.

EJEMPLO

Para n observaciones x_1 , x_2 ,.... x_n con promedio

$$\bar{x} = (1/n)\sum x_i$$

la varianza es

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

NOTAS

1. *La varianza de la muestra es un estimador no sesgado de la varianza de la población.*
2. *La varianza es n/(n-1) veces el momento central de orden 2 (véase nota de [ISO 3534-1] 2.39).*

Comentario de la **Guía**: La varianza definida aquí se designa más apropiadamente como "el estimado muestral de la varianza de la población". La varianza de una muestra se define usualmente como el momento central de orden 2 de la muestra (véase C.2.13 y C.2.22).

C.2.21 Desviación estándar [ISO 3534-1, 2.34]

La raíz cuadrada positiva de la varianza.

NOTA

La desviación estándar de la muestra es un estimador no sesgado de la desviación estándar de la población.

C.2.22 Momento central de orden q [ISO 3534-1, 2.37]

En una distribución de característica única, la media aritmética de la q-ésima potencia de la diferencia entre los valores observados y su promedio $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

donde n es el número de observaciones

NOTA

El momento central de orden 1 es igual a cero.

C.2.23 Estadístico [ISO 3534-1, 2.45]

Una función de las variables aleatorias de la muestra.

NOTA

Un estadístico, como una función de variables aleatorias, es también una variable aleatoria y como tal asume diferentes valores de muestra a muestra. El valor del estadístico obtenido usando los valores observados en esta función puede usarse en una prueba estadística o como una estimación de un parámetro de la población, tales como una media o una desviación estándar.

C.2.24 Estimación [ISO 3534-1, 2.49]

La operación de asignar, a partir de observaciones en una muestra, valores numéricos a los parámetros de una distribución elegida como el modelo estadístico de la población de la cual se ha tomado la muestra.

NOTA

Un resultado de esta operación puede expresarse como un valor único (estimado puntual; véase [ISO 3534-1] 2.51 [C.2.26] o como un estimador de intervalo (véase [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27] y 2.58 [C.2.28]).

C.2.25 Estimador [ISO 3534-1, 2.50]

Un estadístico usado para estimar un parámetro de la población.

C.2.26 Estimado [ISO 3534-1, 2.51]

El valor de un estimador obtenido como resultado de una estimación.

C.2.27 Intervalo de confianza bilateral [ISO 3534-1, 2.57]

Cuando T_1 y T_2 son dos funciones de los valores observados tales que, siendo θ un parámetro de población a estimar, la probabilidad $Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ es al menos igual a $(1 - \alpha)$ [donde $(1 - \alpha)$ es un número fijo, positivo y menor a 1], el intervalo entre T_1 y T_2 es un intervalo de confianza bilateral $(1 - \alpha)$ para θ.

NOTAS

1. *Los límites T_1 y T_2 del intervalo de confianza son estadísticos (ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) y como tales, generalmente toman diferentes valores de muestra a muestra.*
2. *En una serie larga de muestras, la frecuencia relativa de casos en los cuales el valor verdadero del parámetro de población θ está contenido cubierto por el intervalo de confianza es mayor que o igual a $(1 - \alpha)$.*

C.2.28 Intervalo de confianza unilateral [ISO 3534-1, 2.58)

Cuando T es una función de los valores observados tal que, siendo θ un parámetro de población a estimar, la probabilidad $Pr(T \geq \theta)$ [o la probabilidad $Pr(T \leq \theta)$] es al menos igual a $(1 - \alpha)$ [donde $(1 - \alpha)$ es un número fijo, positivo y menor que 1], el intervalo desde el valor más pequeño posible de θ hasta T (o el intervalo desde T hasta el valor más grande posible de θ) es un intervalo de confianza unilateral $(1 - \alpha)$ para θ

NOTAS

1. *El límite T del intervalo de confianza es un estadístico ([ISO 3534-1] 2.45 [C.2.23]) y como tal generalmente asume diferentes valores entre muestra y muestra.*
2. *Véase nota 2 de [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27].*

C.2.29 Coeficiente de confianza; nivel de confianza [ISO 3534-1, 2.59]

El valor $(1 - \alpha)$ de la probabilidad asociada con un intervalo de confianza o un intervalo de cobertura estadística.

(véase [ISO 3534-1] 2.57 [C.2.27], 2.58 [C.2.28] y 2.61 [C.2.30].)

NOTA

$(1 - \alpha)$ se expresa frecuentemente como un porcentaje,

C.2.30 Intervalo de cobertura estadística [ISO 3534-1, 2.61]

Un intervalo para el cual puede decirse, con un nivel de confianza dado, que contiene al menos una proporción específica de la población.

NOTAS

1. *Cuando ambos límites se definen mediante estadísticos, el intervalo es bilateral. Cuando uno de los dos límites no es finito o es la frontera de la variable, el intervalo es unilateral.*
2. *También se le llama "intervalo de tolerancia estadística". Este término no debería usarse porque puede causar confusión con "intervalo de tolerancia" el cual se define en ISO 3534-2.*

C.2.31 Grados de libertad [ISO 3534-1, 2.85]

En general, el número de términos en una suma menos el número de restricciones sobre los términos de la suma.

C.3 Elaboración de términos y conceptos

C.3.1 Esperanza

La esperanza de una función $g(z)$ sobre una función de densidad de probabilidad $p(z)$ de la variable aleatoria z se define mediante

$$E\,[g(z)] = \int g(z)\, p(z)\, dz$$

donde, a partir de la definición de $p(z)$,

$$\int p(z)\, dz = 1$$

La esperanza de la variable aleatoria z, denotada por μ_z llamada también el valor esperado o la media de z, está dado por

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z p(z)\, dz$$

Esta se estima estadísticamente mediante $\bar{z}$, la media aritmética o promedio de n observaciones independientes z_i de la variable aleatoria z , cuya función de densidad de probabilidad es $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 Varianza

La varianza de una variable aleatoria es la esperanza de su desviación cuadrática alrededor de su esperanza. Por lo tanto la varianza de la variable aleatoria z con función de densidad de probabilidad $p(z)$ está dada por

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z) dz$$

donde μ_z , es la esperanza de z. La varianza $\sigma^2(z)$ puede estimarse mediante

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

donde

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

y los z_i son n observaciones independientes de z.

NOTAS

1. *El factor n – 1 en la expresión para $s^2(z_i)$ surge de la correlación entre z_i y $\bar{z}$ y refleja el hecho de que existen sólo n – 1 objetos independientes en el conjunto $\{z_i - \bar{z}\}$.*
2. *Si se conoce la esperanza μ_z, de z , la varianza puede estimarse mediante*

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2$$

La varianza de la media aritmética o promedio de las observaciones, más que la varianza de las observaciones individuales, es la medida adecuada de la incertidumbre del resultado de una medición. La varianza de una variable z debe distinguirse cuidadosamente de la varianza de la media $\bar{z}$. La varianza de la media aritmética de una serie de n observaciones independientes z_i de z está dada por $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ y se estima mediante la varianza experimental de la media

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Desviación estándar

La desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Mientras que una incertidumbre estándar de Tipo A se obtiene sacando la raíz cuadrada de la varianza estadísticamente calculada, al determinar la incertidumbre de Tipo B frecuentemente es más conveniente primero evaluar una desviación estándar equivalente no estadística y luego obtener la varianza equivalente elevando al cuadrado la desviación estándar.

C.3.4 Covarianza

La covarianza de dos variables aleatorias es una medida de su mutua dependencia. La covarianza de las variables aleatorias y y z se define mediante

$$\mathrm{cov}(y, z) = \mathrm{cov}(z, y) = \mathrm{E}\{[y - \mathrm{E}(y)][z - \mathrm{E}(z)]\}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(y,z) &= \mathrm{cov}(z,y)\\ &= \iint (y - \tilde{\imath}_y)(z - \tilde{\imath}_z)\, p(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \iint yz\, p(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \tilde{\imath}_y \tilde{\imath}_z\end{aligned}$$

en donde $p\ (y, z)$ es la función de densidad de probabilidad conjunta de las dos variables y y z. La covarianza cov(y, z) [también denotada como $\upsilon\ (y, z)$] puede estimarse mediante s(y_i, z_i) obtenida a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas y_i y z_i de y y z.

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})$$

donde

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

NOTA

La covarianza estimada de las dos medias $\bar{y}$ *y* $\bar{z}$ *está dada por* $s(\bar{y}, \bar{z}) = s(y_i, z_i)/n$

C.3.5 Matriz de covarianza

Para una distribución de probabilidad multivariada, la matriz V con elementos iguales a las varianzas y covarianzas de las variables se llama matriz de covarianza. Los elementos diagonales, $\upsilon\ (z, z) \equiv \sigma^2(z)$ o $s(z_i, z_i) \equiv s^2(z_i)$, son las varianzas mientras que los elementos fuera de la diagonal, $\upsilon\ (y, z)$ o $s(y_i, z_i)$, son las covarianzas.

C.3.6 Coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación es una medida de la mutua dependencia relativa de dos variables, igual a la razón de sus covarianzas y la raíz cuadrada positiva del producto de sus varianzas. Entonces

$$\rho\ (y,z) = \rho\ (z,y) = \frac{\upsilon(y,z)}{\sqrt{\upsilon(y,y)\upsilon(z,z)}} = \frac{\upsilon(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

con estimaciones

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

El coeficiente de correlación es un número puro tal que

$$-1 \leq \rho \leq +1 \quad \text{ó} \quad -1 \leq r(y_i, z_i) \leq +1$$

NOTAS

1. *Debido a que ρ y r son números puros en el intervalo de -1 a $+1$ inclusive, mientras que las covarianzas son usualmente magnitudes con dimensiones y magnitudes físicas inconvenientes, los coeficientes de correlación son generalmente más útiles que las covarianzas.*
2. *Para distribuciones de probabilidad multivariadas, se da generalmente la matriz de coeficientes de correlación en lugar de la matriz de covarianza. Debido a que $\rho(y, y) = 1$ y $r(y_i, y_i) = 1$, los elementos de la diagonal de esta matriz son iguales a uno.*
3. *Si las estimaciones de entrada x_i y x_j están correlacionadas (véase 5.2.2) y si un cambio δ_i en x_i produce un cambio δ_j ; en x_j, entonces el coeficiente de correlación asociado con x_i y x_j se estima aproximadamente mediante*

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\,\delta_j / u(x_j)\delta_i$$

Esta relación puede servir como una base para estimar experimentalmente los coeficientes de correlación. Puede usarse también para calcular el cambio aproximado en una estimación de entrada debido a un cambio en alguna otra, estimación de entrada, de que se conozcan sus coeficientes de correlación.

C.3.7 Independencia

Dos variables aleatorias son estadísticamente independientes si su distribución de Ia probabilidad conjunta es igual al producto de las distribuciones de probabilidad individuales.

NOTA

Si dos variables aleatorias son independientes, su covarianza y su coeficiente de correlación son cero, pero lo contrario no es necesariamente cierto.

C.3.8 La distribución t; la distribución de Student

La distribución t o de Student es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua t cuya función de densidad de probabilidad es

$$p(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]} \left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

$$-\infty < t < +\infty$$

en donde Γ es la función gamma y $\nu > 0$. El valor esperado de la distribución t es cero y su varianza es $\nu/(\nu - 2)$ para $\nu > 2$. Conforme $\nu \to \infty$ la distribución t se aproxima a la distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ (véase C.2.14).

La distribución de probabilidad de la variable $\bar{z} - \bar{\mu}_z)/s(\bar{z})$ es la distribución t si la variable aleatoria z tiene una distribución normal con esperanza μ_z, donde $\bar{z}$ es la media aritmética de n observaciones independientes z_i de z, $s(z_i)$ es la desviación estándar experimental de las n observaciones y $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ es la desviación estándar experimental de la media $\bar{z}$ con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

Anexo "D"

Valor "verdadero", error e incertidumbre

El término **valor verdadero** (B.2.3) tradicionalmente se ha usado en publicaciones que tratan el tema de incertidumbre, pero no en esta **Guía** por las razones que se presentan en este anexo. Debido a que los términos "mensurando," "error" e "incertidumbre" se mal interpretan frecuentemente, en este anexo se presenta, además, una discusión adicional sobre las ideas en que se fundamentan estos conceptos, para complementar la discusión que se da en el capítulo 3. Se presentan dos figuras para ilustrar por qué el concepto de incertidumbre que se adopta en esta **Guía** se basa en el resultado de la medición y su incertidumbre evaluada en lugar de basarse en !as magnitudes desconocidas valor "verdadero" y error.

D.1 El mensurando

D.1.1 El primer paso para hacer una medición es definir el mensurando – la magnitud que se va a medir; el mensurando no puede definirse mediante un valor sino únicamente mediante una descripción de una magnitud. Sin embargo, en principio, un mensurando no puede describirse *completamente* sin hacer uso de una infinita magnitud de información. Por lo tanto, al dejar espacio para hacer interpretaciones, una definición incompleta del mensurando introduce una componente de incertidumbre en la incertidumbre del resultado de la medición que puede o no, ser significativa dependiendo de la exactitud que demande la medición.

D.1.2 Frecuentemente, la definición de un mesurando especifica ciertas condiciones y estados físicos.

EJEMPLO

La velocidad del sonido en aire seco con una composición (fracción molar) N_2 = 0,7808 ; O_2 = 0,2095 ; Ar = 0,009 35, y CO_2 = 0,000 35 a la temperatura T = 273,15 K y presión p = 101 325 Pa.

D.2 La magnitud realizada

D.2.1 Idealmente, la magnitud realizada para medición sería totalmente consistente con la definición del mensurando. Sin embargo, frecuentemente no es posible realizar tal magnitud y la medición se lleva a cabo sobre una magnitud que es una aproximación del mensurando.

D.3 El valor "verdadero" y el valor corregido

D.3.1 El resultado de la medición de la magnitud realizada se corrige por la diferencia entre esa magnitud y el mensurando para predecir cuál habría sido el resultado de la medición si la magnitud realizada hubiera cumplido totalmente la definición del mensurando. El resultado de la medición de la magnitud realizada se corrige también por todos los efectos sistemáticos significativos conocidos. A pesar de que el resultado corregido final se considera, a veces, como la mejor estimación del valor "verdadero" del mensurando, en realidad el resultado es simplemente el mejor estimado del valor de la magnitud que se pretende medir.

D.3.2 Como un ejemplo, supóngase que el mensurando es el espesor de una determinada lámina de material a una temperatura específica. La lámina se lleva a una temperatura cerca de la especificada y se mide su espesor con un micrómetro. El espesor del material en ese punto y a esa temperatura, bajo la presión aplicada por el micrómetro, es la magnitud realizada.

D.3.3 Se determina la temperatura del material, en el momento de la medición, y la presión aplicada. El resultado no corregido de la medición de la magnitud realizada se corrige entonces tomando en cuenta la curva de calibración del micrómetro, la diferencia entre la temperatura de la lámina y la temperatura especificada, y la ligera compresión de la lámina por la presión aplicada.

D.3.4 Al resultado corregido se le puede llamar el mejor estimado del valor "verdadero", en donde "verdadero" se refiere al valor de la magnitud que se cree satisface plenamente la definición del mensurando; pero si el micrómetro se hubiera aplicado a alguna parte diferente de la lámina,

entonces la magnitud realizada hubiera sido diferente y se tendría un valor "verdadero" diferente. Sin embargo, este valor "verdadero" sería consistente con la definición del mensurando debido a que nunca se especificó que el grosor tendría que ser determinado en algún lugar específico de la lámina. Por lo tanto, en este caso, debido a la definición incompleta del mensurando, el valor "verdadero" tiene una incertidumbre que puede evaluarse a partir de mediciones hechas en diferentes lugares de la lámina. Hasta cierto punto, cada mensurando tiene una incertidumbre "intrínseca" que, en principio, puede estimarse de alguna manera. Esta es la mínima incertidumbre con la cual se puede determinar un mensurando, y, cada medición que alcanza tal incertidumbre puede tomarse como la mejor medición posible del mensurando. Para obtener un valor de la magnitud en cuestión con una menor incertidumbre se requiere que la definición del mensurando sea más completa.

NOTAS

1. *En el ejemplo, la definición del mensurando deja en duda muchos otros aspectos que posiblemente podrían afectar el grosor de la lámina: la presión barométrica, la humedad, el comportamiento de la lámina en un campo gravitacional, la manera como se sostiene, etc.*
2. *A pesar de que el mensurando debe definirse con tal detalle que cualquier incertidumbre que provenga de una decisión incompleta sea despreciable en comparación con la exactitud de la medición requerida, se debe reconocer que esto no siempre es posible. La definición podría estar incompleta, por ejemplo, por no especificar parámetros cuyos efectos se han supuesto, injustificadamente, despreciables; o podría implicar condiciones que nunca podrán ser plenamente cumplidas y cuya realización imperfecta es difícil de tomar en cuenta. Para ilustrar lo anterior, tomemos el ejemplo de D.1.2. en donde la velocidad del sonido implica ondas planas infinitas de una amplitud muy pequeña. Al grado que la medición no satisface estas condiciones, tendrían que tomarse en cuenta la difracción y los efectos no lineales.*
3. *La definición inadecuada del mensurando puede llevar a discrepancias entre los resultados teóricamente de la misma magnitud llevada a cabo en diferentes laboratorios.*

D.3.5 El término "valor verdadero de un mensurando" o de una magnitud (frecuentemente simplificado a "valor verdadero") se evita en esta **Guía** porque la palabra "verdadero" se considera redundante. "Mensurando" (véase B.2.9) significa "magnitud particular sujeta a medición", por lo tanto"valor del mensurando" significa "valor de una magnitud particular sujeta a medición". Puesto que "magnitud particular" generalmente se entiende que significa una magnitud definida o especificada (véase B.2.1, nota 1), entonces el adjetivo "verdadero" en "valor verdadero de un mensurando" (o en "valor verdadero de una magnitud") no es necesario. El valor "verdadero" del mensurando (o magnitud) es simplemente el valor del

mensurando (o magnitud). Además, como se indicó en la discusión anterior, un valor "verdadero" único no es más que un concepto idealizado.

D.4 Error

El resultado corregido de una medición no es el valor del mensurando - es decir, existe un error - debido a una imperfecta medición de la magnitud realizada por variaciones aleatorias en las observaciones (efectos aleatorios), determinación inadecuada de correcciones por efectos sistemáticos y conocimiento incompleto de ciertos fenómenos físicos (que son también efectos sistemáticos). Nunca podrán conocerse exactamente ni el valor de la magnitud realizada ni el del mensurando; lo único que podemos conocer son sus valores estimados. En el ejemplo anterior, el grosor medido de la lámina *puede* tener un error, es decir, puede diferir del valor del mensurando (el grosor de la lámina), debido a que cada uno de los siguientes factores pueden combinarse para contribuir con un error desconocido al resultado de la medición:

a) diferencias pequeñas entre las lecturas del micrómetro cuando se aplica repetidamente a la misma magnitud realizada;
b) calibración imperfecta del micrómetro
c) medición imperfecta de la temperatura y de la presión aplicada
d) conocimiento incompleto de los efectos de temperatura, presión barométrica y humedad sobre la lámina o en el micrómetro o en ambos.

D.5 Incertidumbre

D.5.1 Mientras que los valores exactos de las contribuciones al error de un resultado de una medición son desconocidos y no pueden conocerse, las *incertidumbres* asociadas con los efectos aleatorios y sistemáticos que dan lugar al error sí pueden evaluarse. Pero, aún si las incertidumbres evaluadas son pequeñas, no existe garantía de que el error en el resultado de la medición sea pequeño; ya que podría haberse por alto algún efecto sistemático por no haber sido identificado, en la determinación de una corrección o debido a la falta de conocimiento disponible. Por tanto, la incertidumbre del resultado de una medición no es necesariamente una indicación de la certeza de que el resultado de la medición este cerca del valor del mensurando; simplemente implica una estimación de la verosimilitud existente acerca de la proximidad con el mejor valor que es consistente con el conocimiento disponible actualmente.

D.5.2 La incertidumbre de medición es, por lo tanto, una forma de expresar el hecho de que, para un mensurando y un resultado de medición dados, no hay un único valor, sino un número infinito de valores dispersos alrededor del resultado que son consistentes con todas las observaciones, datos y conocimientos que se tengan del mundo físico, y que con diversos grados de credibilidad pueden atribuirse al mensurando.

D.5.3 Afortunadamente en muchas de las situaciones prácticas de medición no tiene aplicación mucho de lo discutido de este anexo. Algunos ejemplos son: cuando el mensurando está definido adecuadamente; cuando los patrones o instrumentos se calibran usando patrones de referencia bien conocidos con trazabilidad a patrones nacionales; y cuando las incertidumbres de las correcciones de calibración son insignificantes comparadas con las incertidumbres provenientes de efectos aleatorios en las lecturas de instrumentos, o de un limitado número de observaciones (véase E.4.3). Sin embargo, el conocimiento incompleto de las magnitudes de influencia y sus efectos sobre la medición pueden, con frecuencia, contribuir significativamente a la incertidumbre del resultado de una medición.

D.6 Representaciones gráficas

D.6.1 La figura D. 1 muestra algunas de las ideas que se discuten en el capítulo 3 de esta **Guía** y en este anexo Ilustra por qué esta **Guía** se enfoca sobre la incertidumbre y no en el error. El error exacto del resultado de una medición por lo general no se conoce y no se puede conocer. Lo único que se puede hacer es estimar tanto los valores de las magnitudes de entrada, incluyendo las correcciones por los efectos sistemáticos identificados y conocidos, así como las correspondientes incertidumbres estándar (desviaciones estándar estimadas), ya sea de distribuciones de probabilidad desconocidas que son muestreadas por medio de observaciones repetidas, o a partir de distribuciones *a priori* o subjetivas basadas en toda la información disponible; posteriormente se calcula el resultado de la medición a partir de los valores estimados de las magnitudes de entrada y la incertidumbre estándar combinada de ese resultado a partir de las incertidumbres estándar de aquellas estimaciones. Sólo si existe una sólida base para creer que todo esto ha sido hecho apropiadamente, sin que se hayan pasado por alto efectos sistemáticos significativos, se puede asumir que el resultado de la medición es una estimación confiable del valor del mensurando y que su incertidumbre estándar combinada es una medida confiable de su posible error.

NOTAS

1. En la figura D.1a, las observaciones se muestran como un histograma para propósitos ilustrativos (véase 4.4.3 y figura 1b).

2. La corrección para un error es igual al negativo del error estimado. Por lo tanto, en las figuras D.1 y D.2, una flecha que ilustra la corrección por un error es igual en longitud pero apunta en la dirección opuesta a la flecha que hubiera ilustrado al error mismo, y viceversa. El texto de la figura aclara si una flecha en particular ilustra una corrección o un error.

D.6.2 La figura D.2 muestra algunas de las mismas ideas ilustradas en la figura D.1 pero de una forma diferente. Más aun, ilustra la idea de que puede haber muchos valores del mensurando si la definición del mensurando es incompleta (inciso *g* de la figura). La incertidumbre proveniente de esta incompleta definición, medida utilizando la varianza, se evalúa a partir de mediciones de realizaciones múltiples del mensurando, usando el mismo método, instrumentos, etc. (véase D.3.4).

NOTA

En la columna titulada "Varianza" se sobrentiende que las varianzas son las $u_i^2(y)$, *definidas por la ecuación (11) en 5.1.3; por lo tanto se suman linealmente, como se muestra.*

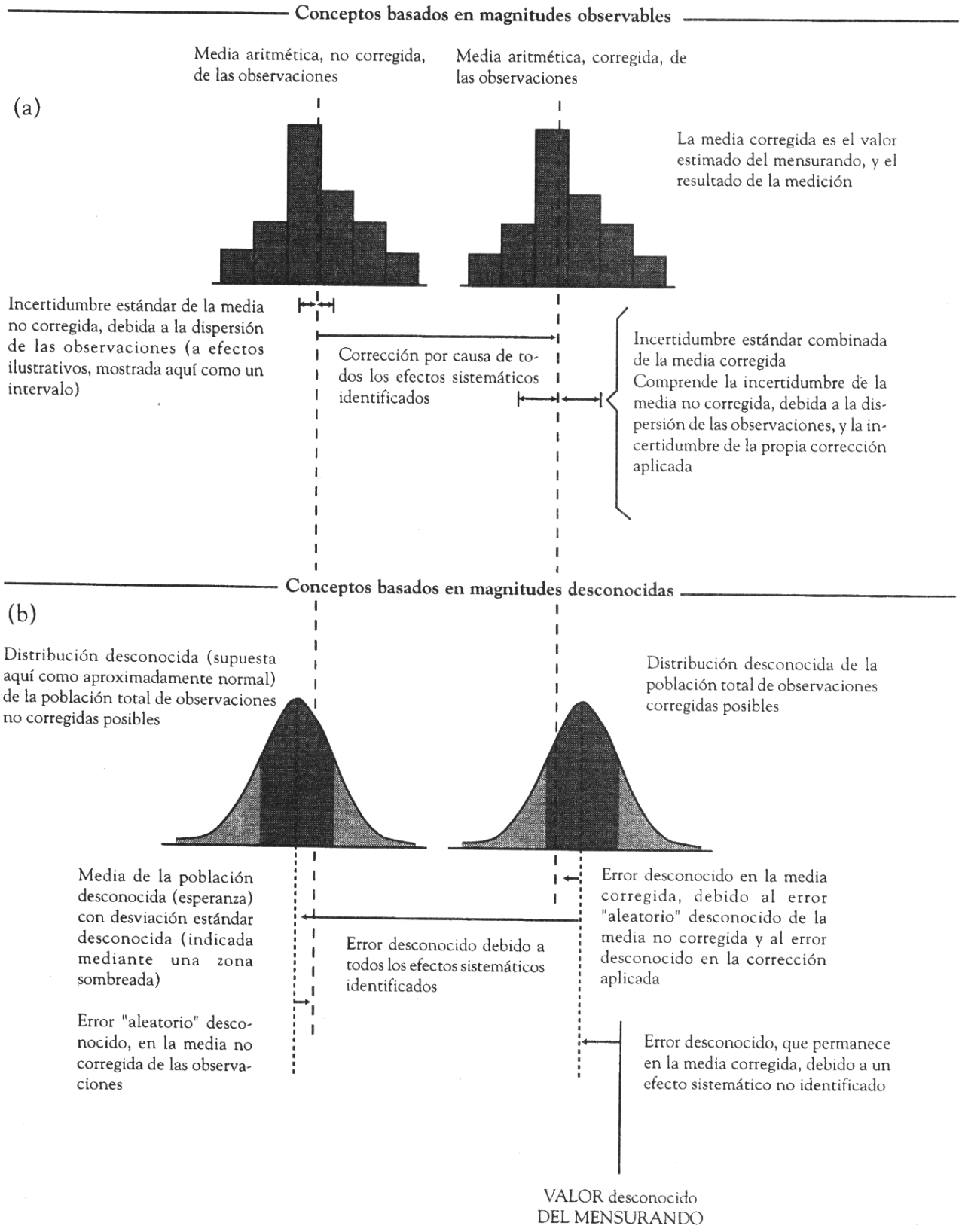

Figura D1. Ilustración gráfica de valor, error e incertidumbre

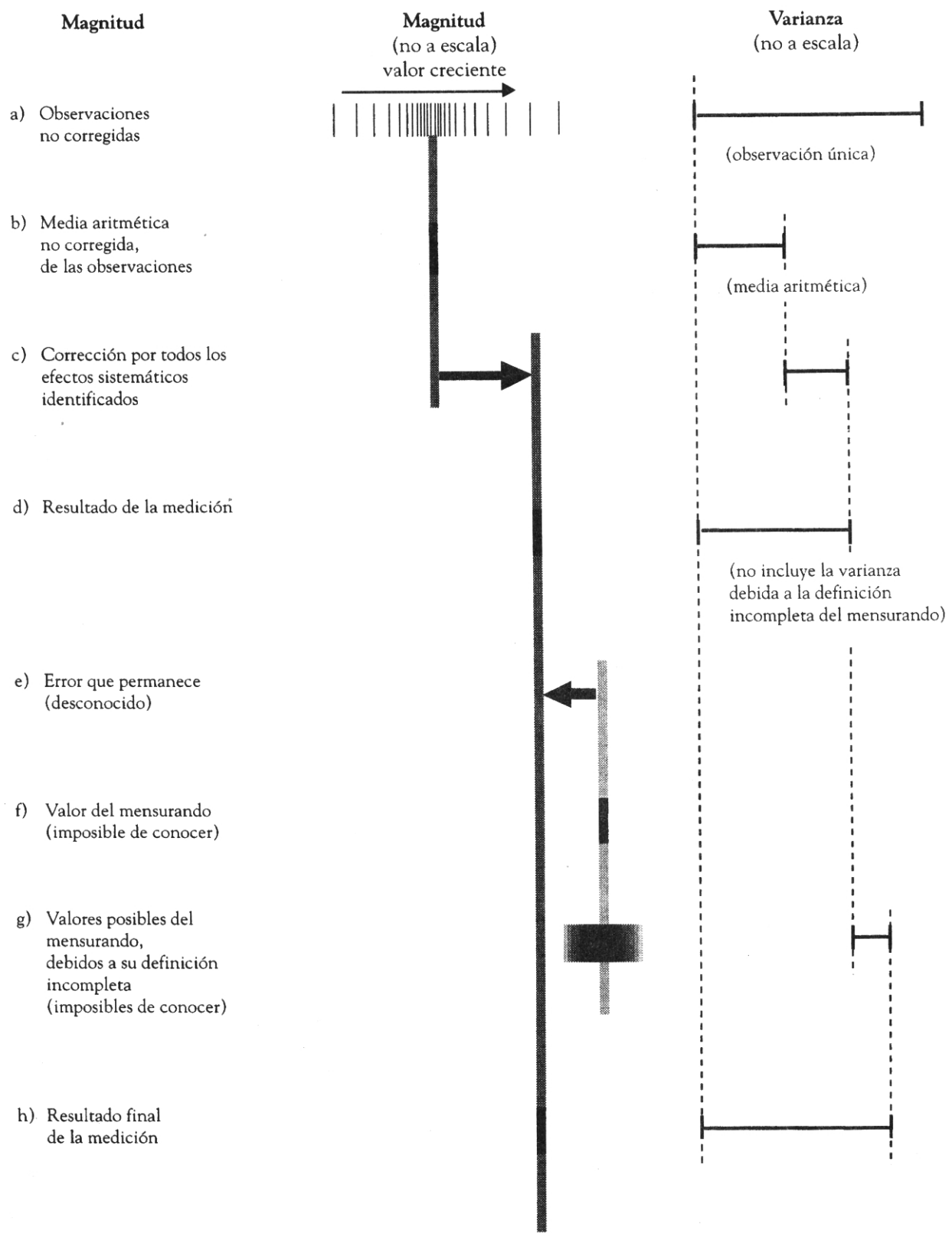

Figura D2. Ilustración gráfica de valor, error e incertidumbre

Anexo "E"

Motivaciones y bases para la Recomendación INC-1 (1980)

En este anexo se da una breve discusión tanto de la motivación como de las bases estadísticas para la Recomendación INC-1 (1980) del Grupo de Trabajo sobre la Expresión de Incertidumbres en los que se basa esta **Guía**. Para más detalles, véanse las referencias [1, 2, 11, 12].

E. 1 "Seguro", "aleatorio" y "sistemático"

E.1. 1 Esta **Guía** presenta un método ampliamente aplicable para evaluar y expresar la incertidumbre de medición. Proporciona un valor realista de la incertidumbre en lugar de uno "seguro", basado en el concepto de que no hay una diferencia inherente entre una componente de incertidumbre que resulta de un efecto aleatorio y otra que resulta de una corrección por un efecto sistemático (véase 3.2.2 y 3.2.3). Por tanto, el método se diferencia de métodos anteriores, los cuales tienen en común las siguientes dos ideas:

E.1.2 La primera idea es que una incertidumbre que se informa debiera ser "segura" o "conservadora", significando que nunca debe ser incorrecta por ser demasiado pequeña. De hecho, debido a que es problemática la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición, a menudo se le hace deliberadamente grande.

E.1.3 La segunda idea es que las influencias que causan la incertidumbre siempre son reconocibles ya sea como "aleatorias" o "sistemáticas", siendo cada una de diferente naturaleza, las incertidumbres asociadas con cada una de ellas se combinan en una manera particular y se

informan por separado (o cuando se requiere de un sólo número, se combinan de alguna manera específica). De hecho, el método de combinación de incertidumbres a menudo se diseña para satisfacer los requisitos de seguridad.

E.2 Justificación para evaluaciones realistas de la incertidumbre

E.2.1 Cuando se expresa el valor de un mensurando deben darse la mejor estimación de su valor y así como la mejor evaluación de la incertidumbre de dicha estimación, ya que si la incertidumbre fuera incorrecta, normalmente no es posible decidir en que dirección se tendría un error "seguro". Una declaración de un valor muy pequeño para la incertidumbre podría generar demasiada confianza al ser incluida en los valores reportados, lo que puede traer consecuencias embarazosas o aún desastrosas. Una declaración de la incertidumbre que se haga deliberadamente muy grande puede tener también repercusiones indeseables. Puede causar que los usuarios de equipo de medición adquieran equipo más caro del que realmente necesitan, o puede causar que productos costosos sean innecesariamente descartados o que los servicios de un laboratorio de calibración sean rechazados.

E.2.2 Esto no quiere decir que aquellos que usen el resultado de una medición no puedan aplicar su propio factor multiplicativo a esta incertidumbre establecida para obtener una incertidumbre expandida que defina un intervalo con un nivel especificado de confianza y que satisfaga sus propias necesidades, ni que en ciertas circunstancias, las instituciones que proporcionan resultados de mediciones no puedan aplicar, de manera rutinaria, un factor que determine una incertidumbre expandida similar la cual satisfaga las necesidades de una clase particular de usuarios de sus resultados. Sin embargo, estos factores (que deben declararse siempre) deben aplicarse a la incertidumbre determinada mediante un método realista, y sólo *después* de que la incertidumbre ha sido así determinada, de manera que el intervalo definido por la incertidumbre expandida tenga el nivel de confianza requerido y la operación pueda fácilmente invertirse.

E.2.3 Al realizar una medición, frecuentemente deben incorporarse en el análisis los resultados de mediciones hechas por otros, teniendo, cada uno de dichos resultados, una incertidumbre propia. Al evaluar la incertidumbre de los resultados de las mediciones propias, es necesario conocer el mejor valor, no un valor "seguro", de la incertidumbre de cada uno de los resultados incorporados que provengan de otras fuente . Adicionalmente, debe contarse con un método lógico y simple mediante el cual estas incertidumbres importadas puedan combinarse con las

incertidumbres de las observaciones propias para dar la incertidumbre del resultado final. La Recomendación INC-1 (1980) proporciona este método.

E.3 Justificación para tratar todas las componentes de incertidumbre de manera idéntica

La finalidad de la discusión en este subcapítulo es un ejemplo simple que ilustra cómo esta **Guía** trata exactamente en la misma forma a las componentes de incertidumbre que surgen a partir de efectos aleatorios y de las correcciones por efectos sistemáticos durante la evaluación de la incertidumbre del resultado de una medición. Esto ejemplifica, por tanto, el punto de vista adoptado en esta **Guía** y citado en E. 1.1., es decir, que todas las componentes de incertidumbre son de la misma naturaleza y por lo tanto son tratadas idénticamente. El punto de partida de la discusión es una deducción simplificada de la expresión matemática para la propagación de desviaciones estándar, llamada en esta **Guía** la ley de propagación de incertidumbres.

E.3.1 Sea la magnitud de salida $z = f(w_1, w_2 \ldots\ldots w_N)$ la cual depende de N magnitudes de entrada w_1, w_2, ..., w_N, donde cada w_i se describe por una distribución de probabilidad apropiada. Al expandir f alrededor de las esperanzas de los w_i, $E(w_i) \equiv \mu_i$, en una serie de Taylor de primer orden, para pequeñas desviaciones de z alrededor de μ_z, en función de pequeñas desviaciones de w_i alrededor de μ_i, se obtiene:

$$z - \mu_Z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \qquad \ldots(E.1)$$

en donde todos los términos de mayor orden se consideran despreciables y $\mu_z = f\ (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)$. El cuadrado de la desviación $z - \mu_z$ está dado por

$$(z - \mu_z)^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \right]^2 \qquad \ldots(E.2a)$$

de donde se obtiene

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \qquad \text{...(E.2b)}$$

La esperanza del cuadrado de la desviaciòn $(z - \mu_z)^2$ es la varianza de z, esto es, $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$, y entonces, de la ecuación (E.2b)

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \qquad \text{...(E.3)}$$

donde $E[(w_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2$ es la varianza de w_i, $E[(w_i - \mu_i)\ (w_j - \mu_j)] = v(w_i, w_j)$ es la covarianza de w_i y w_j, y $\rho_{ij} = v(w_i, w_j)/\ (\sigma^2_i\ \sigma^2_j)^{1/2}$ es el coeficiente de correlación de w_i y w_j.

NOTAS

1. *σ_z^2 y σ_i^2 son respectivamente, los momentos centrales de orden 2 (véase C.2.13 y C.2.22) de las distribuciones de probabilidad de z y w_i. Una distribución de probabilidad puede caracterizarse completamente por su esperanza, varianza y momentos centrales de orden mayor.*

2. *La ecuación (13) en 5.2.2 [junto a la ecuación (15)], la cual es usada para calcular la incertidumbre estándar combinada, es idéntica a la ecuación (E.3) excepto que la ecuación (13) está expresada en términos de las estimaciones de las varianzas, las desviaciones estándar y los coeficientes de correlación.*

E.3.2 En la terminología tradicional, la ecuación (E.3) es llamada frecuentemente la 'ley general de propagación del error" nombre que se aplica mejor a una expresión de la forma,

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial w_i}\right)\Delta w_i$$

donde Δz es el cambio en z causado por (pequeños) cambios Δw_i en w_i [véase la ecuación (E.8)]. De hecho, es apropiado llamar a la ecuación (E.3) la ley de propagación de incertidumbre como se ha hecho en esta **Guía** porque muestra como las incertidumbres de las magnitudes de entrada w_i, consideradas iguales a las desviaciones estándar de distribuciones de probabilidad de las w_i, se combinan para dar la incertidumbre de la magnitud de salida z si esta incertidumbre se toma igual a la desviación estándar de la distribución de probabilidad de z.

E.3.3 La ecuación (E.3) también se aplica a la propagación de múltiplos de desviaciones estándar, de manera que si cada desviación estándar σ_i, es reemplazada por un múltiplo $k\sigma_i$, con la misma k para cada σ_i la desviación estándar del mensurando z es reemplazada por $k\sigma_z$. No obstante, lo anterior no es válido para intervalos de confianza: si cada σ, es reemplazada por una magnitud δ_i que define un intervalo correspondiente a nivel de conflanza determinado p, la magnitud resultante correspondiente a z, δ_z, no definirá un intervalo con el mismo nivel de confianza p a menos que todos los w_i, se describan mediante distribuciones normales. En la ecuación (E.3) no se han establecido tales hipótesis con respecto a la normalidad de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes w_i. Más específicamente, si en la ecuación (10) en 5.1.2 cada incertidumbre estándar u (x_j) se evalúa a partir de observaciones repetidas independientes y se multiplica por el factor t de Student apropiado para sus grados de libertad para un valor particular de p (digamos p = 95 por ciento), entonces la incertidumbre de la estimación y no definirá un intervalo correspondiente para tal valor de p (véanse G.3 y G.4).

NOTA

El requisito de normalidad para hacer la propagación de intervalos de confianza utilizando la ecuación (E.3) puede ser una de las razones para la separación histórica de las componentes de incertidumbre deducidas a partir de observaciones repetidas, a las cuales se les supuso una distribuciòn normal, de aquellas que son evaluadas simplemente por medio de límites superior e inferior.

E.3.4 Considérese el ejemplo siguiente: z depende solamente de un argumento w, $z = f(w)$, donde w se estima promediando n valores w_k de w; estos n valores se obtienen a partir de n observaciones repetidas independientes q_k de una variable aleatoria q; y w_k y q_k, están relacionadas por

$$w_k = \alpha + \beta\, q_k \qquad \ldots(E.4)$$

En donde α es un offset o corrimiento "sistemático" constante común a cada observación, y β es un factor común de escala. El corrimiento y el factor de escala, aunque están fijos durante el curso de las observaciones, se supone que están caracterizadas por distribuciones de probabilidad asumidas *a priori*, siendo α y β las mejores estimaciones de las esperanzas de estas distribuciones. La mejor estimación de w es la media aritmética o promedio w obtenida a partir de:

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\alpha + \beta\, q_k) \qquad \ldots(E.5)$$

La magnitud z es entonces estimada mediante $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, \ldots q_n)$ y la estimación $u^2(z)$ de su varianza $\sigma^2(z)$ se obtiene de la ecuación (E.3). Si por simplicidad, se supone que $z = w$, de manera que la mejor estimación de z es $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, entonces la estimación $u^2(z)$ puede encontrarse fácilmente. Nótense de la ecuación (E.5) que

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=l}^{n} q_k = \overline{q}, y \quad \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n}$$

representando las varianzas estimadas de α y β por $u^2(\alpha)$ y $u^2(\beta)$, respectivamente, y suponiendo que las observaciones individuales no están correlacionadas, se encuentra de la ecuación (E.3)

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \qquad \ldots(E.6)$$

en donde $s^2(q_k)$ es la varianza experimental de las observaciones q_k calculada mediante la ecuaciòn (4) en 4.2.2, y $s^2(q_k)/n = s^2(\overline{q})$ es la varianza experimental de la media $\overline{q}$ [ecuación (5) en 4.2.3].

E.3.5 En la terminología tradicional, el tercer término del lado derecho de la ecuación (E.6) es llamado una contribución "aleatoria" a la varianza estimada $u^2(z)$ porque, normalmente, disminuye cuando el número de observaciones n aumenta, mientras que los dos primeros términos son llamados contribuciones "sístemáticas" porque no dependen de n.

Es más significativo, que en algunos tratamientos tradicionales de incertidumbre en las mediciones, la ecuación (E.6) es cuestionada porque no se hace distinción entre incertidumbres que surgen a partir de efectos sistemáticos y aquellas que surgen a partir de efectos aleatorios. En particular, se considera inaceptable el combinar varianzas obtenidas de distribuciones de probabilidad *a priori* con aquellas obtenidas de distribuciones basadas en frecuencia debido a que el concepto de probabilidad se supone aplicable *sólo* a eventos que pueden repetirse muchas veces bajo esencialmente las mismas condiciones, con la probabilidad p de un evento ($0 \leq p \leq 1$) indicando la *frecuencia relativa* con la cual ocurrirá dicho evento.

En contraste con esta interpretación de la probabilidad basada en la frecuencia, un punto de vista igualmente válido es que la probabilidad es una medida del grado de credibilidad de que un

evento puede ocurrir [13, 14]. Por ejemplo, supongamos que un apostador racional tiene la oportunidad de ganar una pequeña magnitud de dinero D. El *grado de credibilidad* del apostador de que el evento A puede ocurrir es p = 0,5 si es indiferente a estas dos opciones de apuesta: (1) recibir D si ocurre el evento A y nada si no ocurre; (2) recibir D si no ocurre el evento A y nada si ocurre. La recomendación INC-1 (1980), sobre la cual se basa esta **Guía**, adopta implícitamente este punto de vista de la probabilidad puesto que interpreta expresiones tales como la ecuación (E.6) como la forma apropiada de calcular la incertidumbre estándar combinada del resultado de una medición.

E.3.6 Existen tres ventajas diferentes para adoptar una interpretación de probabilidad basada en el grado de credibilidad, la desviación estándar (incertidumbre estándar), y la ley de propagación de la incertidumbre [ecuación (E.3)] como la base para evaluar y expresar la incertidumbre en una medición. como se ha estado haciendo en esta **Guía**:

a) la ley de propagación de las incertidumbres permite incorporar fácilmente la incertidumbre estándar combinada de un resultado, en la evaluación de la incertidumbre estándar combinada de otro resultado en el cual se utiliza al primero;

b) la incertidumbre estándar combinada puede servir como base para calcular intervalos que correspondan en una forma realista a sus niveles de confianza requeridos, y

c) no es necesario clasificar las componentes como “aleatorias” o “sistemáticas” (o de cualquier otra forma) cuando se evalúan componentes de incertidumbre, debido a que todas las componentes de incertidumbre son tratadas de la misma forma.

El inciso c) representa una gran ventaja dado que esta categorización es, frecuentemente, fuente de confusión; una componente de incertidumbre no es "aleatoria" ni "sistemática". Su naturaleza está condicionada por el uso que se da a la magnitud correspondiente, o más formalmente, por el contexto en que la magnitud aparece en el modelo matemático que describe a la medición, Por tanto, cuando la magnitud correspondiente es usada en un contexto diferente, una componente "aleatoria" puede convertirse en una componente "sistemática" y viceversa.

E.3.7 Por la razón dada arriba en c), la Recomendación INC-I(1980) no clasifica a las componentes de la incertidumbre como "aleatorias" o "sistemáticas". De hecho, en lo que al cálculo de la

incertidumbre estándar combinada del resultado de una medición le concierne, no hay necesidad de clasificar a las componentes de la incertidumbre y, consecuentemente, no existe una necesidad real para ningún esquema de clasificación. Sin embargo, dado que el, uso de etiquetas convenientes puede ser de ayuda, algunas veces, en la comunicación y discusión de ideas, la recomendación INC-1 (1980) provee un esquema para la clasificación de los dos diferentes *métodos* mediante los cuales pueden evaluarse las componentes de incertidumbre, llamándolos "A" y "B" (véase 0.7, 2.3.2 y 2.3.3).

Al clasificar los métodos usados para evaluar las componentes de incertidumbre se previene el problema principal asociado con la clasificación de las componentes mismas, esto es, la dependencia de la clasificación de una componente de la forma en que las magnitudes correspondientes se usan con la clasificación de una componente. No obstante, la clasificación de los métodos en vez de las componentes no impide colocar a las componentes individuales evaluadas por dichos dos métodos en grupos específicos para un propósito particular en una determinada medición, por ejemplo, cuando se compara la variabilidad experimentalmente observada con la predicha teóricamente de los valores de salida de un sistema complejo de medición (véase 3.4.3).

E.4 La desviación estándar como una medida de la Incertidumbre

E.4.1 La ecuación (E.3) requiere que sin importar como se obtenga la incertidumbre de la estimación de una magnitud de entrada, ésta debe evaluarse como una incertidumbre estándar, esto es, como una desviación estándar estimada. Si en cambio se evalúa alguna alternativa "segura", entonces no podrá ser utilizada en dicha ecuación (E.3). En particular, si se usa el límite de error máximo (la desviación máxima permisible respecto de la supuesta mejor estimación) en la ecuación (E.3), la incertidumbre resultante tendrá un significado mal definido y no podrá ser empleado por quien desee incorporarla en cálculos subsecuentes de incertidumbres de otras magnitudes (véase E.3.3).

E.4.2 Cuando no pueda evaluarse la incertidumbre estándar de una magnitud de entrada mediante el análisis de los resultados de un número adecuado de observaciones repetidas, entonces debe adoptarse una distribución de probabilidad basada en un conocimiento mucho más restringido de lo que sería deseable. Esto sin embargo, no invalida a la distribución o la hace irreal: como todas las distribuciones de probabilidad, ésta es una expresión del conocimiento que se tiene.

E.4.3 Las evaluaciones basadas. en observaciones repetidas no son necesariamente superiores a las obtenidas por otros medios. Considérese, por ejemplo, la desviación estándar experimental de la media $s(\bar{q})$, de n observaciones independientes q_k, de una variable aleatoria distribuida normalmente q [véase la ecuación (5) en 4.2.3]. La magnitud $s(\bar{q})$ es un estadístico (véase C.2.23) que estima a $\sigma(\bar{q})$, la desviación estándar de la distribución de probabilidad de $\bar{q}$, esto es, la desviación estándar de la distribución de los valores de $\bar{q}$ que podrían obtenerse si la medición se repitiera un número infinito de veces. La varianza $\sigma^2[s(\bar{q})]$ de $s(\bar{q})$ está dada, de manera aproximada, por:

$$\sigma^2[s(\bar{q})] \approx \sigma^2(\bar{q}) / 2\nu \qquad \ldots(E.7)$$

donde $\nu = n - 1$ son los grados de libertad de $s(\bar{q})$ (véase G.3.3). Así, la desviación estándar relativa de $s(\bar{q})$, la cual está dada por la razón $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ y que puede tomarse como la medida de la incertidumbre relativa de $s(\bar{q})$, es aproximadamente igual a $[2(n-1)]^{-1/2}$. Esta "incertidumbre de la incertidumbre" de $\bar{q}$, la cual se crea únicamente debido a razones puramente estadísticas de muestreo limitado, puede ser sorprendentemente grande: para n = 10 observaciones es de 24 por ciento. Estos y otros valores se dan en la tabla E. 1, la cual muestra que la desviación estándar de una desviación estándar estadísticamente estimada no es despreciable para valores prácticos de *n*.

Tabla E.1 $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, la desviación estándar de la desviación estándar experimental de la media $\bar{q}$ de n observaciones independientes de una variable aleatoria normalmente distribuida q, relativa a la desviación estándar de la media [(a)].

Número de observaciones *n*	$\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (porcentaje)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Los valores dados han sido calculados a partir de la expresión exacta para $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, no de la expresión aproximada $[2(n-1)]^{-1/2}$

Puede concluirse entonces que las evaluaciones de Tipo A de las incertidumbres estándar no son necesariamente más confiables que las evaluaciones de Tipo B, y que en muchas situaciones de medición prácticas, en donde el número observaciones es limitado, las componentes obtenidas mediante evaluaciones de Tipo B pueden ser mejor conocidas que las componentes obtenidas mediante evaluaciones de Tipo A.

E.4.4 Se ha argumentado que, si bien las incertidumbres asociadas con la aplicación de un método particular de medición son parámetros estadísticos que caracterizan variables aleatorias, existen casos de un "efecto sistemático verdadero" en los cuales la incertidumbre debe ser tratada de una forma diferente. Un ejemplo es un corrimiento que tiene un valor fijo desconocido y que es el mismo para cada determinación obtenida por ese método, debido a una posible imperfección en el principio mismo o en alguna de las suposiciones en que se base este método. Pero si se admite la posibilidad de que exista tal corrimiento y se cree que su magnitud pueda ser significativa, entonces puede ser descrita mediante una distribución de probabilidad, sin que importe la simplicidad con la que fue construida, basada en los conocimientos que llevaron a la conclusión que tal distribución podría existir y ser significativa. De esta forma, si se considera a la probabilidad como una medida del grado de credibilidad de que un evento ocurra, entonces la contribución de este efecto sistemático puede incluirse en la incertidumbre estándar combinada del resultado de una medición, evaluándola como una incertidumbre estándar de una distribución de probabilidad *a priori* y tratándola de la misma manera como a la incertidumbre estándar de cualquiera magnitud de entrada.

EJEMPLO

La especificación de un procedimiento particular de medición requiere que cierta magnitud de entrada sea calculada mediante una expansión en serie de potencias determinada, en la cual los términos de mayor orden son conocidos de manera inexacta. El efecto sistemático debido a que no es posible tratar a estos términos de manera exacta, da lugar a un corrimiento fijo desconocido que no puede ser muestreado experimentalmente mediante repeticiones del procedimiento. Por tanto, la incertidumbre asociada con el efecto no puede evaluarse e incluirse en la incertidumbre del resultado final de la medición si se acepta de manera estricta una interpretación de la probabilidad basada en la frecuencia. Por otro lado, el interpretar a la probabilidad en base al grado de credibilidad, permite que la incertidumbre que caracteriza al efecto sea evaluada mediante una distribución de probabilidad a priori (deducida del conocimiento disponible concerniente a los términos conocidos de manera inexacta) y sea incluida en los cálculos de la incertidumbre estándar combinada del resultado de medición, como cualquier otra incertidumbre.

E.5 Una comparación entre los dos puntos de vista sobre la incertidumbre

E.5.1 El punto en el que se centra esta **Guía** es en el resultado de medición y de su incertidumbre evaluada más que a las magnitudes valor "verdadero" y error las cuales no pueden ser conocidas (véase el anexo D). Tomando el punto de vista operacional de que el resultado de una medición es simplemente el valor atribuido al mensurando y de que la incertidumbre de ese resultado es una medida de la dispersión de los valores que podrían razonablemente atribuirse al mensurando, esta **Guía** desacopla, de hecho, la frecuentemente confusa conexión entre la incertidumbre y las magnitudes que no pueden conocerse valor "verdadero" y error.

E.5.2 Esta conexión puede entenderse al interpretar la deducción de la ecuación (E.3), la ley de propagación de la incertidumbre, desde el punto de partida de valor "verdadero" y error. En este caso μ_i se considera el valor, "verdadero" único, desconocido, de la magnitud de entrada w_i, y cada w_i, se considera relacionado a su valor "verdadero" μ_i por $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, donde ε_i es el error en w_i. La esperanza de la distribución de probabilidad de cada ε_i se supone cero, $E(\varepsilon_i) = 0$, con varianza $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. La ecuación (E.1) se transforma en

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i \qquad \text{...(E.8)}$$

donde $\varepsilon_z = z - \mu_z$ es el error en z y μ_z es el valor "verdadero" de z. Si se calcula la esperanza matemática del cuadrado de ε_z se obtiene una ecuación idéntica a la ecuación E.3 pero en la que $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ es la varianza de E_z ; y $\rho_{ij} = v(\varepsilon_i, \varepsilon_j)/(\sigma_i^2\sigma_j^2)^{1/2}$ es el coeficiente de correlación de ε_i y ε_j donde $v(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ es la covarianza de ε_i, ε_j. Por lo tanto, las varianzas y las covarianzas están asociadas a los *errores* de las magnitudes de entrada más que a las propias magnitudes de entrada.

NOTA

Se asume que la probabilidad se interpreta como una medida del grado de credibilidad de que un evento ocurrirá, implicando que un error sistemático puede tratarse de la misma manera que un error aleatorio y que ε, representa a cualquiera de ellos.

E.5.3 En la práctica, la diferencia en cuanto al punto de vista no se traduce en una diferencia en el valor numérico del resultado de la medición o de la incertidumbre asignada a ese resultado.

Primero, en ambos casos se utilizan las mejores estimaciones disponibles de las magnitudes de entrada w_i para obtener la mejor estimación de z a partir de la función f; no existe diferencia alguna *en los cálculos* si se considera a las mejores estimaciones como los valores que con mayor seguridad pueden atribuirse a las magnitudes en cuestión o las mejores estimaciones de sus valores "verdaderos".

Segundo, debido a que $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$, y puesto que μ_i representa valores fijos únicos y, por tanto, sin incertidumbre asociada, las varianzas y las desviaciones estándar de ε_i y w_i, son idénticos. Esto significa que, en ambos casos, las incertidumbres estándar usadas como estimaciones de las desviaciones estándar σ_i para obtener la incertidumbre estándar combinada del resultado de la medición, son idénticas y proporcionarán el mismo valor numérico para dicha incertidumbre. Nuevamente, no hay ninguna diferencia *en los cálculos*, si una incertidumbre estándar es considerada como una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad de una magnitud de entrada o como una medida de la dispersión de la distribución de probabilidad del error de dicha magnitud.

NOTA

Si no se hubiese hecho la suposición de la nota de E.5.2, entonces la discusión de este apartado no tendría sentido a menos que todas las estimaciones de las magnitudes de entrada y las incertidumbres de estas estimaciones se hubiesen obtenido a partir del análisis estadístico de observaciones repetidas, esto es, a partir de evaluaciones de Tipo A.

E.5.4 En tanto que la aproximación basada en el valor "verdadero" y el error proporcionan los mismos resultados numéricos que la aproximación seguida en esta **Guía** (siempre y cuando se haga la suposición mencionada en la nota E.5.2), el concepto de incertidumbre de esta **Guía** elimina la confusión entre error e incertidumbre (véase el Anexo D). En efecto, la aproximación operacional de esta **Guía**, la cual se enfoca en el valor observado (o estimado) de una magnitud y la variabilidad observada (o estimada) de dicho valor, hace completamente innecesaria cualquier mención del error.

Anexo "F"

Guía práctica para la evaluación de las componentes de la incertidumbre

En este anexo se hacen sugerencias adicionales, principalmente prácticas, para la evaluación de las componente de la incertidumbre, que se pretende sean complementarias a las sugerencias ya hechas en el capítulo 4.

F.1 Componentes evaluados a partir de observaciones repetidas: Evaluación de Tipo A de incertidumbre estándar

F.1.1 Aleatoriedad y observaciones repetidas

F.1.1.1 Las incertidumbres determinadas a partir de observaciones repetidas se consideran frecuentemente como "objetivas", con mayor "rigor estadístico", etc. en contraste a las obtenidas por otros medios. Esto implica, incorrectamente, que dichas incertidumbres pueden evaluarse mediante la simple aplicación de las fórmulas estadísticas a las observaciones realizadas, y que su aplicación no requiere del ejercicio de algún tipo de juicio.

F.1.1.2 La primera pregunta que debe formularse es: "¿Hasta que punto,las observaciones repetidas, son repeticiones completamente independientes del procedimiento de medición"?. Si todas las mediciones se realizan sobre una única muestra, y si el muestreo es parte del procedimiento de medición debido a que el mesurando es una propiedad de un material (y no la propiedad de una muestra específica de tal material), entonces no se han realizado mediciones repetidas independientemente;

por lo tanto, a la varianza observada de las mediciones repetidas en la misma muestra, una evaluación de un componente de la varianza que representaría las posibles diferencias entre diferentes muestras.

Si, corno parte del proceso de medición, debe ajustarse el cero de un instrumento, dicho ajuste debe realizarse como parte de cada repetición , a pesar de que la deriva durante el período en que las observaciones se realicen sea despreciable, dado que existe, potencialmente, una incertidumbre determinable estadísticamente que puede ser atribuible a la puesta en cero.

Similarmente, si debe tomarse la lectura de un barómetro, dicha lectura, en principio, tiene que realizarse para cada repetición. de la medición (preferiblemente después de que se ha perturbado al barómetro y permitido que retorne al equilibrio), dado que puede presentarse una variación tanto en la indicación como en la lectura, aún si la presión barométrica es constante.

F.1.1.3 A continuación debe plantearse la cuestión acerca de si todas las influencias que se asumen como aleatorias lo son en realidad. ¿Son constante las medias y las varianzas de sus distribuciones, o hay, tal vez, una deriva en el valor de una magnitud de influencia no medida, durante el período de las mediciones repetidas?. Si hay un número suficientemente grande de observaciones, las medias aritméticas de los resultados de la primera y segunda mitades del período y sus desviaciones estándar experimentales, pueden calcularse y compararse, una con otra, con la finalidad de decidir si la diferencia entre ellas es significativa desde el punto de vista estadístico, y por tanto, si hay algún efecto que varíe con el tiempo.

F.1.1.4 Normalmente existe una importante componente no aleatoria en las variaciones de los valores de los "servicios comunes" del laboratorio (la tensión y la frecuencia de la alimentación eléctrica, la presión del agua y la temperatura, la presión del nitrógeno, etc.). Si éstas son magnitudes de influencia, dichas componentes no pueden ignorarse.

F.1.1.5 Si la cifra menos significativa de una indicación digital varía continuamente durante una observación debido al "ruido", es a veces difícil no seleccionar valores,

que son una elección personal difíciles de justificar, para tal dígito. Es mejor establecer algún medio para congelar la lectura en algún momento arbitrario y anotar el valor de dicha lectura congelada.

F.1.2 Correlaciones

Muchos de los análisis contenidos en este subcapítulo son aplicables, también, a la evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar.

F.1.2.1 La covarianza asociada con las estimaciones de dos magnitudes de entrada X_i y X_j, pueden ser consideradas cero o insignificantes si

a) X_i, y X_j *no están correlacionadas* (las variables aleatorias, no las magnitudes físicas que se asumen invariantes véase 4.1.1, nota 1), por ejemplo, debido a que hayan sido repetida, pero no simultáneamente, medidas en experimentos independientes *diferentes*, o debido a que representen magnitudes resultantes de evaluaciones *diferentes* que se han hecho sido hechas independientemente, o si

b) cualquiera de las magnitudes X_i y X_j, puede ser considerada como una constante, o si

c) hay información insuficiente para evaluar la covarianza asociada con las estimaciones de X_i y X_j.

NOTAS

1. *Por otro lado, en ciertos casos, tal como en el ejemplo del resistor de referencia de la nota 1 de 5.2.2, es obvio que los magnitudes de entrada están completamente correlacionados y que las incertidumbres estándar de sus estimaciones se combinan linealmente.*
2. *Experimentos diferentes pueden no ser independientes si, por ejemplo, el mismo instrumento es utilizado en cada uno (véase F.1.2.3).*

F.1.2.2 El que dos magnitudes de entradas observadas repetida y simultáneamente estén o no correlacionados puede determinarse utilizando la ecuación (17) en 5.2.3. Por ejemplo, si la frecuencia de un oscilador no compensado o pobremente compensado para efectos de cambios de temperatura, es una magnitud de entrada; y si la temperatura ambiente es también una magnitud de entrada: y si ambas se observan simultáneamente entonces haber una correlación significativa hecha evidente al calcular la covarianza de la frecuencia del oscilador y la temperatura ambiente.

F.1.2.3 En la práctica, las magnitudes de entrada frecuentemente están correlacionadas dado que se utilizan, para estimar sus valores del mismo patrón de trabajo físico, los mismos instrumentos de medición, datos de referencia, y aún el mismo método de medición con una incertidumbre significativa. Sin pérdida de generalidad, supóngase que dos magnitudes de entrada X_1, y X_2, estimadas mediante x_1, y x_2, dependen de un conjunto no correlacionado de variables Q_1, Q_2,..., Q_L. Entonces $X_1 = F(Q_1, Q_2,..., Q_L)$ y $X_2 = G(Q_1, Q_2,.... Q_L)$, aunque algunas de esas variables pueden aparecer solamente en una de las funciones y no en la otra. Si $u^2(q_l)$ es la varianza estimada asociada con la estimación q_l de Q_l entonces la varianza estimada asociada con x_1 es, a partir de la ecuación (10) de 5.1.2,

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l} \right]^2 u^2(q_l) \qquad .....(F.1)$$

con una expresión similar para $u^2(x_2)$. La covarianza estimada asociada con x_1 y x_2 está dada por

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \qquad ....(F.2)$$

Debido a que únicamente aquellos términos para los cuales $\partial F/\partial q_l \neq 0$ y $\partial G/\partial q_l \neq 0$ para una l dada contribuyen a la suma, entonces la covarianza es cero si no existe una variable común para F y G.

El coeficiente de correlación estimado $r(x_1, x_2)$ asociado con las dos estimaciones x_1 y x_2 se determina a partir de $u(x_1, x_2)$ [ecuación (F. 2)] y de la ecuación (14) en 5.2.2, con $u(x_1)$ calculado a partir de la ecuación (F. 1) y $u(x_2)$ de una expresión similar. [Véase también la ecuación (H.9) en H.2.3]. Es también posible que la covarianza estimada asociada con los dos valores estimados de entrada tenga tanto una componente estadística [véase la ecuación (17) en 5.2.3] como un componente del tipo discutido en este subcapítulo.

EJEMPLOS

1. *Un resistor patrón* R_s *se utiliza para determinar, en una misma medición tanto el valor de una corriente* I *como el de una temperatura t. La corriente se determina midiendo, con un voltímetro digital, la diferencia de potencial a través de las terminales del patrón; la temperatura se determina midiendo, con un puente de resistencias y el patrón, la resistencia* $R_t(t)$*de un sensor resistivo de temperatura calibrado cuya relación temperatura-resistencia en el intervalo 15 °C ≤ t ≤ 30 °C es* $t = aR_t^2(t) - t_0$*, en donde a y* t_0*, son constantes conocidas. Por tanto, la corriente se determina a partir de la relación* $I = V_s/R_s$ *en tanto que la temperatura se determina a partir de la relación* $t = a\beta^2(t)R_s^2 - t_0$ *en donde* $\beta(t)$ *es la razón* $R_t(t)/R_s$ *cuya medida es proporcionada por el puente.*

Puesto que, en las expresiones para I *y t, el único factor común es la magnitud* Rs*, la ecuación (F.2) proporciona la siguiente covarianza para* I *y t*

$$u(\mathrm{I}, t) = \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{R}_s}\frac{\partial t}{\partial \mathrm{R}_s}u^2(\mathrm{R}_s)$$

$$= \left[-\frac{\mathrm{V}_s}{\mathrm{R}_s^{\,2}}\right](2\alpha\beta^2(t)\mathrm{R}_s)u^2(\mathrm{R}_s)$$

$$= -\frac{2\mathrm{I}(t+t_o)}{\mathrm{R}_s^{\,2}}u^2(\mathrm{R}_s)$$

(Por simplicidad de notación, en este ejemplo se utilizaron los mismos símbolos para representar tanto a la magnitud de entrada como su estimación).

Para obtener el valor numérico de la covarianza, se substituye en esta expresión los valores numéricos de los mensurandos I *y t, y los valores de* R_s *y* $u(R_s)$ *dados en el certificado de calibración del resistor patrón. Las unidades de u(I, t) son, claramente, A• °C dado que las dimensiones de la varianza relativa* $[u(R_s)/R_s]^2$ *es la unidad (esto es, el último término es una de las llamadas magnitudes adimensionales).*

Adicionalmente, sea P una magnitud relacionada a las magnitudes de entrada I y t mediante $P = C_o I^2 / (T_0+t)$ *en donde* C_o *y* T_o *son constantes conocidas con incertidumbres despreciables* $[u^2(C_o) \approx 0, u^2(T_o) \approx 0]$*. La ecuación (13) en 5.2.2 permite conocer la varianza de* P *en términos de la varianza de* I *y t y su covarianza*

$$\frac{u^2(\mathrm{P})}{p^2} = 4\frac{u^2(\mathrm{I})}{\mathrm{I}^2} - 4\frac{u(\mathrm{I}, t)}{\mathrm{I}(\mathrm{T}_o + t)} + \frac{u^2(t)}{(\mathrm{T}_o + t)^2}$$

Las varianzas $u^2(I)$ *y* $u^2(t)$ *se obtienen aplicando la ecuación (10) de 5.1.2 a las relaciones* $I = V_s/R_s$ *y* $t = \alpha\beta^2(t)R_s^2 - t_o$*. Los resultados son*

$$\frac{u^2(\mathrm{I})}{\mathrm{I}^2} = \frac{u^2(\mathrm{V}_s)}{\mathrm{V}_s^2} + \frac{u^2(\mathrm{R}_s)}{\mathrm{R}_s^2}$$

$$u^2\ (t) = 4\ (t + t_o)^2\ u^2\ (\beta)/\beta^2 + 4\ (t + t_o)^2\ u^2\ (\mathrm{R}s)/\mathrm{R}s^2$$

donde por simplicidad se asume que las incertidumbres de las constantes t_o y a son también despreciables. Estas expresiones pueden evaluarse de manera inmediata dado que $u^2\ (V_s)$ y $u^2(\beta)$ pueden ser determinadas respectivamente, a partir de lecturas repetidas del voltímetro y del puente de resistencias. Por supuesto, cualquier incertidumbre inherente a los instrumentos mismos y al proceso de medición empleado, deben ser también tomada en consideración cuando se determinan $u^2(V_s)$ y $u^2(\beta)$.

2. *En el ejemplo de la nota 1 de 5.2.2, supóngase que la calibración de cada resistor está representada mediante $R_i = \alpha_i R_s$, en donde $u(\alpha_i)$ es la incertidumbre estándar de la razón medida αi obtenida a partir de observaciones repetidas. Adicionalmente, sea $\alpha_i \approx 1$ para cada resistor, y sea $u(\alpha_i)$ esencialmente la misma para cada calibración, de manera que $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Entonces las ecuaciones (F.1) y (F.2) dan como resultado $u^2(R_i) = R_s^2 u^2(\alpha) + u^2(R_s)$ y $u(R_i, R_j) = u^2(R_s)$. Esto implica, al utilizar la ecuación (14) de 5.2.2, que el coeficiente de correlación de cualesquiera dos resistores ($i \neq j$) es*

$$\mathrm{r}\ (\mathrm{R_i}\ ,\ \mathrm{R_j}) \equiv \mathrm{r_{ij}} = \left[1 + \left[\frac{u(\alpha)}{u(\mathrm{R}_s)/\mathrm{R}_s} \right]^2 \right]^{-1}$$

Dado que $u(R_s)/R_s = 10^{-4}$, si $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0{,}5$; si $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0{,}990$; y si $u\ (\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 1{,}000$. Así pues, conforme $u(\alpha) \to 0$, $r_{ij} \to 1$ y $u(R_i) \to u\ (R_s)$.

NOTA

En general, durante una calibración de comparación, tal como la de este ejemplo, los valores estimados de los artefactos calibrados están correlacionados. El grado de correlación depende de la razón de la incertidumbre de la comparación a la incertidumbre del patrón de referencia. Cuando, como ocurre frecuentemente en la práctica, la incertidumbre de la comparación es despreciable con respecto a incertidumbre del patrón, en los coeficientes de correlación son iguales a + 1 y la incertidumbre de cada instrumento calibrado es la misma que la del patrón.

F.1.2.4 La necesidad de introducir la covarianza $u(x_i\ ,\ x_j)$ puede ser pasada por alto si el conjunto original magnitudes de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_N$. de las cuales depende el mensurando Y [véase la ecuación (1) en 4. 1] es redefinido de tal manera que incluya como magnitudes de entrada independientes adicionales aquellas magnitudes Q_l, que son comunes a dos o más de las X_i originales. (Puede ser necesario realizar mediciones adicionales para establecer completamente relación

entre Q_l, y las X_i afectadas). Sin embargo, en algunas situaciones puede ser más conveniente retener las covarianzas en lugar de incrementar el número de magnitudes de entrada. Un proceso similar puede ser llevado a cabo sobre las covarianzas observadas de observaciones simultáneas repetidas [véase la ecuación (17) en 5.2.3], pero la identificación de las magnitudes de entrada adicionales apropiados se realiza frecuentemente mediante razonamientos *ad hoc* y no físicos.

EJEMPLO

Si, en el ejemplo 1 en el subcapítulo anterior, las expresiones para I *y t en términos de* R_s *son introducidas en la expresión para* P*, el resultado es*

$$p = \frac{C_o V_s^2}{R_s^2 [T_o + a\beta^2(t) R_s^2 - T_o]}$$

la correlación entre I *y t se evita a expensas de reemplazar los magnitudes de entrada* I *y t con las magnitudes* V_s, R_s *y* β. *Dado que esas cantidades no están correlacionadas, entonces la varianza de* P *puede ser obtenida a partir de la ecuación (10) en 5.1.2.*

F.2 Componentes evaluados mediante otros métodos: evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar

F.2.1 La necesidad de las evaluaciones de Tipo B

Si para la realización de una medición en el laboratorio se dispusiera de tiempo y recursos ilimitados, puede conducirse una investigación estadística exhaustiva de cada una de las causas concebibles de la incertidumbre, por ejemplo, utilizando equipo de muchos tipos y de proveedores distintos, diferentes métodos de medición, diferentes aplicaciones del método y diferentes aproximaciones para los modelos teóricos de la medición. Las incertidumbre asociadas con todos estas causas podría entonces evaluarse mediante el análisis estadístico de muchas series de observaciones y la incertidumbre de cada causa sería caracterizada mediante una desviación estándar estadísticamente evaluada. En otras palabras, todos las componentes de la incertidumbre serían obtenidas a partir de evaluaciones de Tipo A. Puesto que tal evaluación no es económicamente práctica, muchos componentes de la incertidumbre deben ser evaluados por cualesquiera otros métodos prácticos.

F.2.2 Distribuciones determinadas matemáticamente

F.2.2.1 La resolución de una indicación digital

Una de las fuentes de incertidumbre de un instrumento digital es la resolución de su dispositivo indicador. Por ejemplo, aún si las indicaciones repetidas fueran todas idénticas, la incertidumbre de la medición atribuible a la repetibilidad no sería cero, debido a que existe un intervalo conocido de señales de entrada que darán la misma indicación en el instrumento. Si la resolución del dispositivo indicador es δx, el valor del estímulo que produce una indicación X dada puede localizarse con igual probabilidad en cualquier lugar en el intervalo de $X - \delta x/2$ a $X + \delta x/2$. El estímulo es entonces descrito mediante una distribución de probabilidad rectangular (véase 4.3.7 y 4.4.5) de anchura δx con varianza $u^2 = (\delta x)^2/12$, implicando una incertidumbre estándar de $u = 0{,}29\delta x$ para cualquier indicación.

Así pues, un instrumento para pesar cuyo menor dígito significativo sea 1 g tiene una varianza debida a la resolución del instrumento de $u^2 = (1/12)g^2$ y una incertidumbre estándar de

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right) g = 0{,}29\ g$$

F.2.2.2 Histéresis

Ciertos tipos de histéresis pueden causar un tipo similar de incertidumbre. La indicación de un instrumento puede diferir por una cierta magnitud fija y conocida dependiendo de si las sucesivas lecturas son de valores progresivamente mayores o progresivamente menores. El operador prudente toma nota de la dirección en la que se realizan las lecturas sucesivas, y lleva a cabo la corrección correspondiente. Sin embargo, la dirección de la histéresis no es siempre observable: pueden existir oscilaciones ocultas en el instrumento alrededor de un punto de equilibrio, de tal manera que la lectura depende de la dirección desde la cual se realiza la aproximación a este punto. Si el intervalo de posibles lecturas originado por este motivo es δx, la varianza es, nuevamente, $u^2 = (\delta x)^2/ 12$, y la incertidumbre estándar debido a la histéresis es $u = 0{,}29\ \delta x$.

F.2.2.3 Aritmética de precisión finita

El redondeo o truncamiento de números que se ocasiona por el uso de computadoras para el manejo de datos, puede constituirse, también, en una fuente de incertidumbre. Considérese por ejemplo, una computadora con una longitud de palabra de 16 bits, Si, durante el curso del cálculo, un número que tenga esta longitud de palabra es substraído de otro del cual difiere únicamente en el 16º bit, el resultado contará con un solo bit significativo. Tales eventos pueden surgir durante la evaluación de algoritmos "mal estructurados", y pueden ser difíciles de predecir. Es posible obtener una determinación empírica de la incertidumbre incrementando la magnitud de entrada más importante para el cálculo (hay frecuentemente uno que es proporcional a la magnitud del resultado) en pequeños incrementos hasta que cambie el resultado; el cambio más pequeño en la salida que puede ser obtenido mediante este método puede ser tomado como una medida de la incertidumbre. Si esta es igual a δx, la varianza es $u^2 = (\delta x)^2/12$ y $u = 0{,}29\delta x$.

NOTA

Se puede verificar la evaluación de la incertidumbre comparando el resultado del cálculo llevado a cabo en la máquina con longitud de palabra limitada, con el resultado del mismo cálculo llevado a cabo en una máquina con una longitud de palabra significativamente mayor.

F.2.3 Valores de entrada importados

F.2.3.1 Un valor *importado* para un argumento es aquel que no ha sido estimado en el curso de una medición dada, sino que se ha obtenido de alguna otra fuente como resultado de una evaluación independiente. Frecuentemente tal valor importado se *acompaña* de una declaración de la incertidumbre correspondiente. Por ejemplo, la incertidumbre puede estar dada como una desviación estándar, un múltiplo de una desviación estándar, o el semiancho de un intervalo que tiene un nivel de confianza especificado.

Alternativamente, pueden proporcionarse límites superior e inferior, o bien, puede ser que no se proporcione información acerca de la incertidumbre. En este último caso el usuario debe hacer uso de su conocimiento acerca del valor probable de la incertidumbre, dada la naturaleza de la magnitud, la confiabilidad de la fuente, las incertidumbres obtenidas para tal magnitud en la práctica, etc.

NOTA

La discusión de la incertidumbre de valores de entrada importados se incluye en este subcapítulo de evaluación de Tipo B de incertidumbre estándar por conveniencia; la incertidumbre de tal magnitud podría estar formada por componentes de elementos obtenidos de las evaluaciones de Tipo A o de componentes obtenidos a partir de las evaluaciones de Tipo A y de Tipo B. Puesto que para calcular una incertidumbre estándar combinada es innecesario distinguir entre las componentes evaluadas por cada uno de los dos diferentes métodos, entonces es también innecesario conocer la composición de la incertidumbre de una magnitud importada.

F.2.3.2 Algunos laboratorios de calibración han adoptado la práctica de expresar la "incertidumbre" en la forma de límites superior e inferior que definen un intervalo que tiene un "mínimo" nivel de confianza, por ejemplo, "al menos" 95 por ciento. Esto puede ser visualizado como un ejemplo de la así llamada incertidumbre "segura" (véase E. 1.2). Esta incertidumbre no puede ser convertida a una incertidumbre estándar sin conocer cómo fue calculada. Si se da suficiente información, puede ser recalculada de acuerdo con las reglas de esta **Guía**; de otra manera, debe hacerse una estimación independiente de la incertidumbre por cualesquiera medios que se tengan disponibles.

F.2.3.3 Algunas incertidumbres se dan simplemente como límites máximos dentro de los cuales se dice que están) contenidos todos los valores de la magnitud. Es una práctica común asumir que todos los valores dentro de esos límites son igualmente probables (una distribución de probabilidad rectangular), pero no debe asumirse tal distribución si existen razones para pensar que valores colocados cerca de las cotas son menos probables que los que se encuentran cerca del centro de ellas.

Una distribución rectangular de semiancho a tiene una varianza de $a^2/3$; una distribución normal para la cual a es el semiintervalo de un intervalo que tiene un nivel de confianza de 99,73 por ciento tiene una varianza de $a^2/9$. Puede ser prudente adoptar un compromiso entre estos valores, por ejemplo, asumiendo una distribución triangular para la cual la varianza es $a^2/6$ (véase 4.3.9 4.4.6).

F.2.4 Magnitudes de entrada medidos

F.2.4.1 Una sola observación, instrumentos calibrados

Si una estimación de una magnitud de entrada ha sido obtenida a partir de una sola observación con un instrumento particular que ha sido calibrado contra un patrón de incertidumbre pequeña, la incertidumbre de la estimación es, principalmente, de repetibilidad. La varianza de mediciones repetidas realizadas mediante este instrumento puede haber sido obtenida en una ocasión anterior, no necesariamente para el mismo valor de la lectura sino a alguno suficientemente cercano como para que sea útil, pudiéndose asumir que la varianza es aplicable a la misma magnitud de entrada en cuestión. Si no se dispone de tal información, debe hacerse una estimación basada en la naturaleza del aparato o instrumento de medición, las varianzas conocidas de otros instrumentos de construcción similar, etc.

F.2.4.2 Una sola observación, instrumentos verificados

No todos los instrumentos de medición son acompañados por un certificado de calibración o una curva de calibración. La mayoría de los instrumentos, sin embargo, son construidos de acuerdo a una norma escrita y se verifica su conformidad con dicha norma , ya sea por el fabricante o por una autoridad independiente.

Usualmente la norma contiene requisitos metrológicos, frecuentemente en la forma de "errores máximos permisibles", los cuales se exige que el instrumento cumpla. El cumplimiento de estos requisitos por parte del instrumento es determinado mediante la comparación con un instrumento de referencia cuya máxima incertidumbre permitida se especifica usualmente en la misma norma. Esta incertidumbre es entonces una componente de la incertidumbre del instrumento verificado.

Si no se tiene ninguna información de la curva característica del error del instrumento verificado, debe asumirse que existe la misma probabilidad de que el error tenga cualquier valor dentro de los límites permitidos, esto es, una distribución de probabilidad rectangular.

Sin embargo, cierto tipo de instrumentos tienen curvas características tales que los errores son, por ejemplo, casi siempre positivos en parte del intervalo de medición y

negativos en otras partes. Algunas veces tal información puede ser deducida a partir del estudio de la norma escrita.

F.2.4.3 Magnitudes controladas

Frecuentemente, las mediciones se realizan bajo condiciones de referencia controladas las cuales se asume que permanecen constantes durante el curso de una serie de mediciones. Por ejemplo, las mediciones pueden ser realizadas en especímenes sumergidos en baños termostáticos recirculadores de aceite cuya temperatura está controlada mediante un termostato. La temperatura del baño puede ser medida en el momento de cada medición sobre el especímen, pero si la temperatura del baño está cambiando de manera cíclica, la temperatura instantánea del espécimen puede no ser la temperatura indicada por el termómetro en el baño. El cálculo de las fluctuaciones en la temperatura del espécimen basadas en la teoría de transferencia de calor, y de su varianza, está más allá del alcance de esta **Guía**, pero debe comenzarse por conocer o asumir un ciclo de temperatura. El ciclo puede ser observado mediante un buen termopar y un graficador de temperatura; en ausencia de esto, puede hacerse una aproximación deducida a partir del conocimiento de la naturaleza de los controles.

F.2.4.4 Distribución asimétrica de valores posibles

Hay ocasiones en que todos los valores posibles de una magnitud se localizan del mismo lado de un único valor límite. Por ejemplo cuando se mide la altura vertical fija h (el mesurando) de la columna de líquido en un manómetro, el eje del instrumento usado para la medición de la altura puede desviarse de la vertical por un pequeño ángulo β. La distancia l determinada por el instrumento será siempre mayor que h; no es posible obtener valores menores que h. Esto es debido a que h es igual a la proyección $l \cos \beta$ implicando que $l = h/\cos \beta$, y todos los valores de $\cos \beta$ son menores que uno; no es posible obtener valores mayores que uno. Este error, llamado "error de coseno", puede ocurrir, también, de manera tal que la proyección $h' \cos\beta$ de un mesurando h' es igual a la distancia observada l, esto es, $l = h' \cos \beta$, de manera tal que la distancia observada es siempre menor que el mensurando. Si se define una nueva variable $\delta = 1 - \cos \beta$, los dos casos considerados son, suponiendo $\beta \approx 0$ ó $\delta << 1$ como es usual en la práctica,

$$h = \bar{l}(1 - \delta) \qquad \ldots.(F.3a)$$

$$h = \bar{l}(1 + \delta) \qquad \ldots(F.3b)$$

Aquí $\bar{l}$, la mejor estimación de l, es la media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes l_k de l con una varianza estimada $u^2(\bar{l})$ [véanse las ecuaciones (3) y (5) en 4.2]. Por tanto se sigue de las ecuaciones (F.3a) y (F.3b) que mientras que para obtener una estimación de h o h' se requiere una estimación del factor de corrección δ, para obtener la incertidumbre estándar de la estimación h o h' se requiere de $u^2(\delta)$, la varianza estimada de δ. Más específicamente, la aplicación de (10) en 5.1.2 a las ecuaciones (F.3a) y (F.3b) da como resultado para $u_c^2(h)$ y $u_c^2(h')$ (signos "–" y "+", respectivamente)

$$u_c^2 = (1 \pm \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \ldots.(F.4a)$$

$$u_c^2 \approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \ldots(F.4b)$$

Para obtener las estimaciones del valor esperado de δ y de la varianza de δ, asúmase que al eje del aparato utilizado para medir la altura de la columna de líquido en el manómetro se le restringe a estar fijo en el plano vertical y que la distribución de los valores del ángulo de inclinación β alrededor de su valor esperado, que en este caso es cero, es una distribución normal con varianza o^2. A pesar de que β puede tener tanto valores positivos como negativos, $\delta = 1 - \cos \beta$ es positiva para todos los valores de β. Si se asume que el desalineamiento del eje del instrumento no está sujeto a ninguna restricción, la orientación del eje tendrá variaciones dentro de un cierto ángulo sólido, dado que es posible que se tengan, también, variaciones azimutales, β será entonces, siempre un ángulo positivo.

En el caso con restricciones o unidimensional, el **elemento de probabilidad** $p(\beta)\ d\beta$ (nota de C.2.5) es proporcional a $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]d\beta$; en el caso sin

restricciones o bidimensional, el elemento de probabilidad es proporcional a $[\exp(-\beta^2/2\sigma^2)]\text{sen}\,\beta d\beta$. En ambos casos, las funciones dedensidad de probabilidad $p(\delta)$ son las expresiones requeridas para determinar la esperanza y la varianza de δ utilizadas en las ecuaciones (F.3) y (F.4). Estas pueden ser fácilmente obtenidas a partir de esos elementos de probabilidad debido a que el ángulo β puede suponerse pequeño, y por tanto, $\delta = 1 - \cos\beta$ y sen β pueden ser expandidos al menor orden en β. Esto da como resultado $\delta \approx \beta^2/2$, sen $\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$, y $d\beta = d\delta/\sqrt{2\delta}$. Las funciones de densidad de probabilidad son entonces

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}}\exp\left(-\frac{\delta}{\sigma^2}\right) \qquad \ldots(F.5a)$$

en una dimensión

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\delta}{\sigma^2}\right) \qquad \ldots(F.5b)$$

en dos dimensiones en donde

$$\int_o^\infty p(\delta) = 1$$

Las ecuaciones (F.5a) y (F.5b), las cuales muestran que el valor más probable de la corrección δ es en ambos casos cero, resultan, en el caso unidimensional $E(\delta) = \sigma^2/2$ y $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ para la esperanza y la varianza de δ; y en el caso bidimensional $E(\delta) = \sigma^2$ y var $(\delta) = \sigma^4$. Las ecuaciones (F.3a), y F.3b) y (F.4b) se transforman en:

$$h = \bar{l}[1-(d/2)u^2(\beta)] \qquad \ldots(F.6a)$$

$$h' = \bar{l}[1+(d/2)u^2(\beta)] \qquad \ldots(F.6b)$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + d/2)\bar{l}^2 u^4(\beta) \qquad \ldots(F.6c)$$

en donde d es la dimensíonalidad (d = 1 ó 2) y $u(\beta)$ es la incertidumbre estándar del ángulo β, tomada como la mejor estimación de la desviación estándar σ de una distribución asumida como normal y evaluada a partir de toda la información disponible concerniente al proceso de medición (evaluación de Tipo B). Este es un ejemplo de un caso en donde la estimación del valor de un mesurando depende la *incertidumbre* de una magnitud de entrada.

Aunque las ecuaciones (F.6a) a (F.6c) son específicas para la distribución normal, el análisis puede ser realizado suponiendo otras distribuciones para β. Por ejemplo, si se supone para β una distribución rectangular simétrica con límites inferior y superior de $-\beta_o$ y $+\beta_o$, en el caso unidimensional y 0 y $+\beta_o$ en el caso bidimensional, se tendrá que $E(\delta) = \beta_o^2/6$ y var $(\delta) = \beta_o^4/45$ en el caso unidimensional; y $E(\delta) = \beta_o^2/4$ y var $(\delta) = \beta_o^4/48$ en el caso de dos dimensiones.

NOTA

Esta es una situación en donde la expansión de la función $Y = f(X_1, X_2,....X_N)$ en una serie de Taylor de primer orden para obtener $u_c^2(y)$, ecuación (10) en 5.1.2, es inadecuada dada la no linealidad de f: $\overline{\cos\beta} \neq \cos\bar{\beta}$ (véase la nota 2 en 5.1.2, y H.2.4). Aunque el análisis puede ser realizado enteramente en términos de β, introducir la variable δ simplifica el problema.

Otro ejemplo de una situación en donde todos los posibles valores de una magnitud se encuentran colocados en el mismo lado de un único valor limitante es la determinación por titulación de la concentración de un componente en una solución en donde el punto final está indicado por el disparo de una señal; la magnitud de reactivo añadido es siempre mayor que el necesario para disparar la señal: nunca es menor. El exceso titulado más allá del punto límite es una variable requerida en la reducción de los datos, y el procedimiento en este caso (y casos similares) es suponer una distribución de probabilidad apropiada para el exceso y utilizarla para obtener el valor esperado del exceso y su varianza.

EJEMPLO

Si se supone una distribución rectangular para el exceso z, cuyo límite inferior es cero en tanto que el superior es C_o, entonces el valor esperado para el exceso es $C_o/2$ con una varianza asociada de $C_o^2/12$. Si la función de densidad de probabilidad del exceso se supone normal con $0 \leq z < \infty$, esto es, $p(z) = \left(\sigma\sqrt{\pi/2}\right)^{-1} \exp(-z^2/2\sigma^2)$, entonces el valor esperado es $\sigma\,(2/\pi)^{1/2}$ con varianza $\sigma^2\,(1-2/\pi)$

F.2.4.5 Incertidumbre cuando no se aplican las correcciones de una curva de calibración

En la nota de 6.3.1 se discute el caso cuando no se aplica una corrección conocida b para un efecto sistemático significativo en el momento de informar el resultado de una medición, sino que es considerado incrementando la "incertidumbre" asociada al resultado. Un ejemplo es el reemplazo de la incertidumbre expandida U con $U + b$, en donde U es una incertidumbre expandida obtenida bajo la suposición de que $b = 0$. Esta práctica es seguida algunas veces en situaciones en donde se aplican todas las condiciones siguientes: El mensurando Y se define sobre un intervalo de valores de un parámetro t, como en el caso de la curva de calibración para un sensor de temperatura; U y b dependen, también, de t; y se debe asignar un único valor de "incertidumbre" para todas las estimaciones $y(t)$ del mensurando sobre todo el intervalo de posibles valores de t. En tales situaciones el resultado de la medición es frecuentemente reportado como $Y(t) = y(t) \pm [U_{\max} + b_{\max}]$, en donde el subíndice "max" indica que se usan los valores máximo de U y de la corrección conocida b en el intervalo de valores t.

Aunque esta **Guía** recomienda que, las correcciones para efectos sistemáticos significativos conocidos sean aplicadas a los resultados de las mediciones, esto puede no ser siempre conveniente debido al costo inaceptable en el que se incurriría al calcular y aplicar una corrección individual, y al calcular y usar una incertidumbre individual, para cada valor de $y(t)$.

Una aproximación comparativamente simple a este problema que es consistente con los principios de esta **Guía** es como sigue:

Calcular una *única* corrección promedio $\overline{b}$ a partir de

$$\overline{b} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} b(t)dt \qquad \text{(F.7a)}$$

en donde t_1 y t_2 definen el intervalo de interés del parámetro t, y hacer que la mejor estimación de $Y(t)$ sea $y'(t) = y(t) + \overline{b}$, en donde $y(t)$ es la mejor estimación no corregida de $Y(t)$. La varianza asociada con la corrección promedio $\overline{b}$ en el intervalo de interés está dada por

$$u^2(\overline{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \overline{b}]^2 \, dt \qquad \ldots\text{(F.7b)}$$

en donde no se toma en consideración la incertidumbre de la determinación real de la corrección $b(t)$. La varianza media de la corrección $b(t)$ debido a la determinación real está dada por

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)]dt \qquad \ldots\text{(F.7c)}$$

en donde $u^2[b(t)]$ es la varianza de la corrección $b(t)$. Similarmente, la varianza promedio de $y(t)$ resultante de todas las fuentes de incertidumbre además de la corrección $b(t)$ se obtiene a partir de

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)]dt \qquad \ldots\text{(F.7d)}$$

en donde $u^2[y(t)]$ es la varianza de $y(t)$ debido a todas las fuentes de incertidumbre distintas a $b(t)$. El único valor de la incertidumbre estándar que será usado para todas las estimaciones $y(t) = y(t) + \overline{b}$ del mesurando $Y(t)$ es, entonces, la raíz cuadrada positiva de

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\overline{b})$$

Una incertidumbre expandida U puede ser obtenida al multiplicar $u_c(y')$ por un factor de cobertura apropiadamente elegido k, $U = ku_c(y')$, obteniéndose $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \overline{b} \pm U$. Sin embargo, el uso de la misma corrección promedio para todos los valores de t en lugar de la corrección apropiada para cada valor de t debe ser reconocida y emitirse una declaración clara acerca de lo que representa U.

F.2.5 Incertidumbre del método de medición

F.2.5.1 Probablemente la componente de incertidumbre más difícil de evaluar sea el asociado con el método de medición, especialmente si se ha demostrado que la aplicación de tal método proporciona resultados con menor variabilidad que cualquier otro conocido. Es factible que existan otros métodos, algunos de ellos desconocidos o imprácticos de alguna manera, que darían sistemáticamente resultados diferentes igualmente válidos en apariencia.

Esto implica una distribución de probabilidad *a priori* , y no una distribución a partir de las cuales las muestras puedan ser fácilmente escogidas y tratadas estadísticamente. Así, a pesar de que la incertidumbre del método puede ser la dominante, frecuentemente la única información disponible para evaluar su incertidumbre estándar es el conocimiento personal que se tenga del mundo físico. (Véase también E.4.4.)

NOTA

La determinación del mismo mensurando por diferentes métodos, ya sea en el mismo o en diferentes laboratorios, o mediante el mismo método en diferentes laboratorios, puede, frecuentemente proporcionar información valiosa acerca de la incertidumbre atribuible a un método particular. En general, el intercambio de patrones de medición o de materiales de referencia entre laboratorios para mediciones independientes es una manera útil de apreciar la confiabilidad de las evaluaciones de las incertidumbres y de identificar efectos sistemáticos anteriormente no reconocidos.

F.2.6 Incertidumbre de la muestra

F.2.6.1 Muchas mediciones involucran la comparación de un objeto desconocido con un patrón conocido que tiene características similares con la finalidad de calibrar dicho objeto desconocido. Entre los ejemplos pueden incluirse bloques patrones, ciertos

termómetros, juegos de pesas, resistores, y materiales de alta pureza. En la mayoría de tales casos, los métodos de medición no son especialmente sensitivos a, o adversamente afectados por, la selección de la muestra (esto es, el instrumento desconocido particular que está siendo calibrado), el tratamiento de la muestra, o los efectos de varias magnitudes de influencia ambientales debido a que tanto el instrumento desconocido como el patrón responden en general de la misma manera (rnuchas veces predecible) a tales variables.

F.2.6.2 En algunas situaciones de medición prácticas, el muestreo y el tratamiento de las muestras juegan un papel mucho más importante. Este es frecuentemente el caso del análisis químico de materiales naturales. Contrariamente a lo que sucede con los materiales fabricados por el hombre, los cuales pueden tener una homogeneidad probada a un nivel mayor que el requerido para la medición, los materiales naturales son frecuentemente muy inhomogéneos. Esta inhomogeidad ocasiona el surgimiento de dos componentes adicionales de la incertidumbre. La evaluación del primero requiere de la determinación de qué tan adecuadamente la muestre seleccionada representa al material que está siendo analizado. Para la evaluación del segundo se requiere determinar el grado en el que los constituyentes secundarios (no analizados) influencian la medición y qué tan adecuadamente están siendo tratados por el método de medición.

F.2.6.3 En algunos casos el diseño cuidadoso del experimento puede hacer posible la evaluación estadística de la incertidumbre debida a la muestra (véase H.5 y H.5.3.2). Usualmente, sin embargo, en especial cuando los efectos de las magnitudes ambientales que influyen a la muestra son significativos, se requiere de la habilidad y el conocimiento del analista, derivadas de la experiencia y de toda la información disponible en ese momento, para la evaluación de la incertidumbre.

Anexo "G"

Grados de libertad y niveles de confianza

G.1 Introducción

G.1.1 En este anexo se discute la cuestión general de cómo obtener, a partir de la estimación y del mesurando Y y de la incertidumbre estándar combinada, $u_c(y)$, de dicha estimación, una incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que define un intervalo $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ que tiene una alta probabilidad de cobertura especificada o nivel de confianza p. Por tanto, en este anexo se aborda la tarea de determinar el factor de cobertura k_p, que produce un intervalo alrededor del resultado de la medición y, que se espera incluya una fracción suficientemente grande especificada p de la distribución de valores que pudieran atribuirse razonablemente al mensurando Y (véase capítulo 6).

G.1.2 En la mayoría de las situaciones de medición prácticas, el cálculo de intervalos que tienen niveles específicos de confianza –en realidad, la estimación de la mayoría de las componentes individuales de la incertidumbre en tales situaciones– es, en el mejor caso, sólo aproximado. Aún la desviación estándar experimental de la media aritmética de tantas como 30 observaciones repetidas de una magnitud descrita mediante una distribución normal tiene una incertidumbre de alrededor de 13 por ciento. (véase tabla E. 1 en anexo E).

En la mayoría de los casos no tiene sentido tratar de distinguir entre, por ejemplo, un intervalo que tiene un nivel de confianza del 95 por ciento (una oportunidad en 20 de que el mesurando Y caiga fuera del intervalo) y un intervalo de 94 o de 96 por ciento (1 oportunidad en 17 y 25,

respectivamente). Obtener intervalos justificables con niveles de confianza de 99 por ciento (1 oportunidad en 100) y mayores, es especialmente difícil, aún si se asume que no se ha pasado por alto ningún efecto sistemático, debido a que, generalmente, se dispone de muy poca información acerca de las porciones extremas o "colas" de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada.

G.1.3 Para obtener el valor del factor de cobertura k_p, que produce un intervalo correspondiente a un nivel de confianza específico p se requiere del conocimiento detallado de la distribución de probabilidad que caracteriza al resultado de la medición y su incertidumbre estándar combinada. Por ejemplo, para una magnitud z descrita mediante una distribución normal cuya esperanza es μ_z, y cuya desviación estándar es σ, el valor de k_p, que produce un intervalo $\mu_z \pm k_p\sigma$ que incluye la fracción p de la distribución, y, por tanto, tiene una probabilidad de cobertura o nivel de confianza p, puede calcularse fácilmente. Algunos ejemplos se dan en la tabla G. 1.

Tabla G.1 - Valor del factor de cobertura k_p que produce un intervalo que tiene un nivel de confianza p asumiendo una distribución normal

Nivel de confianza p (por ciento)	Factor de cobertura k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NOTA

En contraste, si z se describe mediante una distribución de probabilidad rectangular con valor esperado μ, *y desviación estándar* $\sigma = a/\sqrt{3}$ *, donde a es el semi ancho de la distribución, el nivel de confianza p es 57,74 por ciento para* $k_p = 1$ *; 95 por ciento para* $k_p = 1{,}73$ *; 99 por ciento para* $k_p = 1{,}71$ *y 100 por ciento para* $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1{,}73$ *. La distribución rectangular es "más estrecha" que la distribución normal en el sentido que es de tamaño finito y no tiene "colas".*

G.1.4 Si las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada X_1, X_2 …. X_n , de los cuales depende el mesurando *Y*, son conocidas [sus valores esperados, varianzas, y momentos de orden mayor (véase C.2.13 y C.2.22) si las distribuciones no son normales], y si *Y* es una función lineal de las magnitudes de entrada, $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + . . . + c_NX_N$, entonces la distribución de probabilidad de *Y* puede obtenerse por convolución de las distribuciones de probabilidad individuales [10]. Los valores de k_p, que producen intervalos correspondientes a niveles de confianza específicos *p* pueden calcularse, entonces, a partir de la distribución resultante de la convolución.

G.1.5 Si la relación funcional entre *Y* y sus magnitudes de entrada es no lineal y una expansión de primer orden en serie de Taylor de dicha relación no es una aproximación aceptable (véase 5.1.2 y 5.1.5), entonces la distribución de probabilidad de *Y* no puede obtenerse haciendo la convolución de las distribuciones de las magnitudes de entrada. En tales casos se requieren otros métodos analíticos o numéricos.

G.1.6 En la práctica, debido a que los parámetros que caracterizan las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada son usualmente valores estimados, dado a que es irreal esperar que el nivel de confianza que se asocie con un intervalo dado se pueda conocer con un alto grado de exactitud, y debido a la complejidad de convolucionar distribuciones de probabilidad, tales convoluciones son implementadas raramente, si acaso lo son, cuando se necesita calcular intervalos que tengan niveles de confianza especificados. En lugar de eso, se usan aproximaciones que utilizan el Teorema del Límite Central.

G.2 Teorema del Límite Central

G.2.1 Si $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N, = \sum_{i=1}^{N} c_i X_i$ y, todas las X_i , se caracterizan mediante distribuciones normales, entonces la distribución resultante de la convolución de *Y* también será normal. Sin embargo, aún si las distribuciones de X_i no son normales, la distribución de *Y* frecuentemente se puede aproximar mediante una distribución normal debido al Teorema del Límite Central. Este teorema establece que la distribución de *Y* será *aproximadamente normal* con esperanza $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i E(x_i)$ y varianza $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \sigma^2(X_i)$, donde $E(X_i)$ es la esperanza de X_i y $\sigma^2(X_i)$ es la varianza de X_i si las X_i son independientes y $\sigma^2(Y)$ es mucho más

grande que cualquier componente individual $c_i^2\sigma^2(X_i)$ de una X_i, cuya distribución no es normal.

G.2.2 El Teorema del Límite Central es importante debido a que muestra el muy relevante papel desempeñado por las varianzas de las distribuciones de probabilidad de las magnitudes de entrada, comparado con el jugado por los momentos de orden mayor de dichas distribuciones, en la determinación de la forma de la distribución convolucionada resultante de *Y*. Además, implica que la distribución obtenida de la convolución converge hacia la distribución normal conforme se incrementa el número de las magnitudes de entrada que contribuyen a $\sigma^2(Y)$; que la convergencia será más rápida conforme los valores de $c_i^2\sigma^2(X_i)$ estén más cercanos entre sí (lo que equivale en práctica a que cada estimación de magnitudes de entrada x_i, contribuya con una incertidumbre comparable a la incertidumbre de la estimación y del mesurando Y); y que mientras más cerca se encuentren las distribuciones de X_i de la distribución normal, se requieren menos X_i , para obtener una distribución normal de *Y*.

EJEMPLO

La distribución rectangular (véase 4.3.7 y 4.4.5) es un ejemplo extremo de una distribución que no es normal, no obstante la convolución de tan pocas como tres de tales distribuciones de igual anchura es aproximadamente normal. Si el semi ancho de cada una de las tres distribuciones rectangulares es α de manera tal que la varianza de cada uno es $a^2/3$, entonces la varianza de la distribución convolucionada es $\sigma^2 = a^2$. Los intervalos de 95 y 99 porciento de la distribución convolucionada se definen por $1{,}937\sigma$ y $2{,}379\sigma$, respectivamente, mientras que los intervalos correspondientes para una distribución normal con la misma desviación estándar σ se definen por $1{,}960\sigma$ y $2{,}576\sigma$ (véase tabla G. 1) [10].

NOTAS

1. *Para cada intervalo con un nivel de confianza p mayor que alrededor de 91,7 por ciento, el valor de kp para una distribución normal es mayor que el valor correspondiente para la distribución resultante de la convolución de cualquier número y tamaño de distribuciones rectangulares.*
2. *Del Teorema del Límite Central se sigue que la distribución de probabilidad de la media aritmética $\overline{q}$ de n observaciones qk, de una variable aleatoria q con una esperanza μq, y una desviación estándar finita σ se aproxima a una distribución normal con media μq y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$ conforme n ∞, cualquiera que pueda ser la distribución de probabilidad de q.*

G.2.3 Una consecuencia práctica del Teorema dei Límite Central es que cuando puede establecerse que sus requerimientos son aproximadamente satisfechos, en particular, si la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ no es dominada por una componente de incertidumbre estándar obtenida mediante una evaluación de Tipo A basada sólo en unas pocas observaciones, o por una componente de incertidumbre estándar obtenida mediante una evaluación de Tipo B basada en una distribución de probabilidad que se asume rectangular, entonces una primera

aproximación razonable para calcular una incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que proporcione un intervalo con un nivel de confianza p, es utilizar un valor obtenido de una distribución normal para k_p. Los valores más comúnmente utilizados para este propósito se dan en la tabla G.1.

G.3 La distribución t y los grados de libertad

G.3.1 Para obtener una mejor aproximación que la obtenida al utilizar un valor k_p de una distribución normal como en G.2.3, debe reconocerse que el cálculo de un intervalo que tenga un nivel específico de confianza requiere, no de la distribución de la variable $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, sino de la distribución de la variable $(y - Y)/u_c(y)$ Esto es debido a que, en la práctica, de lo que se dispone usualmente es de y, la estimación de Y obtenida a partir de $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, en donde x_i es la estimación de X_i; y la varianza combinada asociada con y, $u_c^2(y)$, evaluada a partir de $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$ en donde $u(x_i)$ es la incertidumbre estándar (desviación estándar estimada) de la estimación x_i.

NOTA

Estrictamente hablando, en la expresión $(y - Y)/u_c(y)$, Y debe interpretarse como $E(Y)$. Por simplicidad, dicha distinción se ha hecho en algunos pocos lugares en esta **Guía**. *En general, el mismo símbolo ha sido utilizado para representar a la magnitud física, a la variable aleatoria que representa a dicha magnitud, y a la esperanza de tal variable (véase las notas de 4. 1. 1).*

G.3.2 Si z es una variable aleatoria distribuida normalmente, con esperanza u_z y desviación estándar σ, y $\bar{z}$ es la media aritmética de n observaciones independientes z_k de z, siendo $s(\bar{z})$ la desviación estándar experimental de $\bar{z}$ [véase las ecuaciones (3) y (5) en 4.2], entonces la distribución de la variable $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ es la **distribución *t*** o **distribución de Student** (C.3.8) con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

Consecuentemente, si el mensurando Y es simplemente una única magnitud normalmente distribuida X, $Y = X$; y si X se estima mediante la media aritmética $\bar{X}$ de n observaciones repetidas independientes X_k de X, con desviación estándar experimental de la media igual a $s(\bar{X})$, entonces la mejor estimación de Y es $y = \bar{X}$ y la desviación estándar experimental de tal estimación es $u_c(y) = s(\bar{X})$. Entonces $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ tiene una distribución t con

$$\Pr[-t_p(v) \le t \le t_p(v)] = p \qquad \ldots(G.1a)$$

o

$$\Pr[-t_p(v) \le (y - Y)/u_c(y) \le t_p(v)] = p \qquad \ldots(G.1b)$$

que pueden ser reescritas como

$$\Pr[y - t_p(\nu)u_c(y) \le Y \le y + t_p(\nu)u_c(y)] = p \qquad \ldots(G.1c)$$

En estas expresiones, Pr[ ] significa 'la probabilidad de" y el factor t, $t_p(v)$, es el valor de t para un valor dado del parámetro v –los grados de libertad (véase G.3.3)– tal que la fracción p de la distribución t esté contenido en el intervalo de $-t_p(v)$ a $+ t_p(v)$. Entonces, la incertidumbre expandida

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(v)u_c(y) \qquad \ldots(G.1d)$$

define un intervalo de $y - U_p$ a $y + U_p$, que se escribe de manera conveniente como $Y = y \pm U_p$, que se espera incluya una fracción p de la distribución de valores que podría razonablemente atribuirse a Y, y p es la probabilidad de cobertura o nivel de confianza del intervalo.

G.3.3 El número de grados de libertad v, es igual a $n - 1$ para una única magnitud estimada mediante la media aritmética de n observaciones independientes, como en G.3.2. Si n observaciones independientes se usan para determinar tanto la pendiente como la ordenada en el origen de una línea recta mediante el método de los mínimos cuadrados, el número de grados de libertad de sus respectivas incertidumbres estándar es $v = n - 2$. Para un ajuste por mínimos cuadrados de m parámetros a n datos, el número de grados de libertad de la incertidumbre estándar de cada parámetro es $v = n - m$. (véase la referencia [15] para una discusión más amplia acerca de los grados de libertad.)

G.3.4 En la tabla G.2, al final de este anexo, se listan algunos valores seleccionados $t_p(v)$ para diferentes valores de v y varios valores de p. Conforme $v \to \infty$ la distribución t se aproxima a la

distribución normal y $t_p(\nu) \approx (1 + 2/\nu)^{1/2}\ k_p$, en donde k_p es el factor de cobertura requerido para obtener un intervalo con un nivel de confianza p para una variable distribuida normalmente. Así, el valor $t_p(\infty)$ en la tabla G.2 para una p dada es igual al valor de k_p en la tabla G. 1 para la misma p.

NOTA

Frecuentemente, la distribución t se tabula en cuantiles, en este caso se dan valores de $t_{1-\alpha}$, en donde

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t,\nu)dt$$

es el cuantil, donde f es la función de densidad de probabilidad de t. Entonces t_p y $t_{1-\alpha}$, se relacionan mediante $p = 1 - 2\alpha$. Por ejemplo, el valor del cuantil $t_{0,975}$ que corresponde al cuantil $1 - \alpha = 0,975$ y $\alpha = 0,025$ es la misma que $t_p(\nu)$ para $p = 0,95$.

G.4 Grados efectivos de libertad

G.4.1 En general, la distribución t no describirá la distribución de la variable $(y - Y)/u_c,(y)$ si $u_c^2(y)$ es la suma de dos o más componentes de la varianza estimada $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (véase 5.1.3), aún si cada x_i es la estimación de una magnitud de entrada distribuida normalmente X_i. Sin embargo, la distribución de dicha variable puede aproximarse mediante una distribución t con un número *efectivo* de grados de libertad ν_{eff} obtenido a partir de la fórmula de Welch Satterthwaite [16, 17, 18]

$$\frac{u_c^{\,4}(y)}{\nu_{eff}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^{\,4}(y)}{\nu_i} \qquad \ldots(G.2a)$$

o

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^{\,4}(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^{\,4}(y)}{\nu_i}} \qquad \ldots(G.2b)$$

con

$$\nu_{eff} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i \qquad \ldots(G.2c)$$

donde $u_c^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\ (y)$ (véase 5.1.3). La incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{eff}) u_c(y)$ proporciona, entonces, un intervalo $Y = y \pm U_p$ que tiene aproximadamente un nivel de confianza *p*.

NOTAS

1. *Si el valor de ν_{eff} obtenido a partir de la ecuación (G.2b) no es un entero, que será usualmente el caso en la práctica, el correspondiente valor de t_p puede encontrarse a partir de la tabla G.2 realizando una interpolación o truncando el valor de ν_{eff} al entero menor más próximo.*

2. *Si la estimación de una magnitud de entrada x_i se obtiene a partir de otras dos o más estimaciones, entonces el valor de ν_i que será usado en $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ en el denominador de la ecuación (G.2b) es el número efectivo de grados de libertad calculados a partir de una expresión equivalente a la ecuación (G.2b).*

3. *Dependiendo de las necesidades de los usuarios potenciales del resultado de una medición, puede ser útil calcular y reportar, además de ν_{eff} valores para ν_{effA} y ν_{effB} calculados a partir de la ecuación (G.2b) Tratando por separado las incertidumbres obtenidas a partir de evaluaciones de Tipo A y de Tipo B. Si las contribuciones a $u_c^2(y)$ de las incertidumbres estándar de Tipo A y de Tipo B se denotan, respectivamente, por $u_{cA}^2(y)$ y $u_{cB}^2(y)$, estas magnitudes estarán relacionadas por:*

$$u_c^2(y) = u^2{}_{cA}(y) + u^2{}_{cB}(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \frac{u^4{}_{cA}(y)}{\nu_{effA}} + \frac{u^4{}_{cB}(y)}{\nu_{effB}}$$

EJEMPLO

Sea $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ y que las estimaciones x_1, x_2, x_3 de las magnitudes de entrada X_1, X_2, X_3 sean las medias aritméticas de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ y $n_3 = 15$ observaciones independientes repetidas, respectivamente, con incertidumbres estándar relativas $u(x_1)/x_1 = 0{,}25$ por ciento; $u(x_2)/x_2 = 0{,}57$ por ciento y $u(x_3)/x_3 = 0{,}82$ por ciento. En este caso, $c_i = \partial f/\partial Xi = Y/Xi$, (que será evaluada en x_1, x_2 x_3 - véase la nota 1 de 5.3.3), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3} [u(x_i)/x_i]^2 = (1{,}03$ por ciento$)^2$ (véase la nota 2 de 5.1.6), con lo que la ecuación (G.2b) se transforma en

$$\nu_{eff} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3} \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

Así

$$\nu_{eff} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0$$

el valor de t_p para p = 95 por ciento y ν = 19 es, de acuerdo a la tabla G.2, $t_{95}(19)$ = 2,09; de aquí que la incertidumbre relativa expandida para este nivel de confianza es U_{95} = 2,09 x (1,03 por ciento) = 2,2 por ciento. Puede afirmarse entonces que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$ (y será determinada a partir de $y = bx_1x_2x_3$), o que $0{,}978y \leq Y \leq 1{,}022y$, y que el nivel de confianza que será asociado con el intervalo es aproximadamente 95 por ciento.

G.4.2 En la práctica, $u_C(y)$ depende de las incertidumbres estándar $u(x_i)$ de las estimaciones de las magnitudes de entrada tanto de los que están normalmente distribuidos como de los que no lo están, y las $u(x_i)$ se obtienen tanto de distribuciones de probabilidad basadas en frecuencia como de las obtenidas *a priori* (esto es, a partir de evaluaciones de ambos Tipos A y B). Una afirmación similar se aplica a la estimación y , así como a las estimaciones x_i de las cuales depende y. No obstante, la distribución de probabilidad de la función $t = (y - Y)/u_c(y)$ puede ser aproximada mediante la distribución t si se expande en una serie de Taylor alrededor de su esperanza. En esencia, esto es lo que se consigue, en el más bajo orden de aproximación, utilizando la fórmula de Welch-Satterhwaite (ecuación (G.2a) o (G.2b)

Surge ahora la pregunta acerca de cuántos grados de libertad asignarle a una incertidumbre estándar obtenida a partir de una evaluación de Tipo B cuando ν_{eff} se calcula usando la ecuación (G.2b). Puesto que la definición apropiada de los grados de libertad reconoce el hecho de que ν, tal como aparece en una distribución t es una medida de la incertidumbre de la varianza $s^2(\bar{z})$, la ecuación (E.7) en E.4.3 puede usarse para definir los grados de libertad ν_i

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \qquad \ldots(G.3)$$

El número entre corchetes en el tercer miembro es la incertidumbre relativa de $u(x_i)$; para una evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar ésta es una magnitud subjetiva cuyo valor se obtiene utilizando un juicio científico basado en todo el conjunto de información disponible.

EJEMPLO

Supóngase que el conocimiento que se tiene acerca de cómo se determinó la estimación x_i de una magnitud de entrada y cómo se evaluó su incertidumbre estándar $u(x_i)$ permite concluir que el valor de $u(x_i)$ es confiable en alrededor del 25 por ciento. El significado que puede atribuirse a este hecho es que la incertidumbre relativa $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$ y, por tanto, de la ecuación (G.3), $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$. Por otro lado, si se considera que el valor de $u(x_i)$ en alrededor del 50 por ciento, entonces $\nu_i = 2$. (véase también la tabla E.1 en el anexo E.)

G.4.3 En la discusión en 4.3 y 4.4 acerca de la evaluación de Tipo B de la incertidumbre estándar a partir de una distribución de probabilidad *a priori*, se supuso implícitamente que el valor de $u(x_i)$ resultante de tal evaluación es conocido de manera exacta. Por ejemplo, cuando $u(x_i)$ se obtiene a partir de una distribución de probabilidad rectangular cuyo semi ancho se supone igual a $a = (a_+ - a_-)/2$ como en 4.3.7 y 4.4.5, $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ se considera como una constante sin incertidumbre debido a que así se consideran a_+ y a_-, y, por tanto a, (véase, sin embargo la nota 2 de 4.3.9). Esto implica, debido a la ecuación (G.3) que $\nu_i \to \infty$ o que $1/\nu_i \to 0$, lo que, no obstante, no causa problemas al evaluar la ecuación (G.2b). Además, suponer que $\nu_i \to \infty$, no carece de realismo, debido a que es una práctica común elegir a_+ y a_- de manera tal que la probabilidad de que la magnitud en cuestión se ubique fuera del intervalo de a_- a a_+ es extremadamente pequeña.

G.5 Otras consideraciones

G.5.1 Una expresión que se encuentra en la literatura sobre incertidumbre en las mediciones, y que es utilizada frecuentemente con la finalidad de determinar la incertidumbre que permita obtener un intervalo con un nivel confianza del 95 por ciento, puede ser escrita como sigue

$$U_{95} = [t^2_{95}(\nu'_{eff})s^2 + 3u^2]^{1/2} \qquad \ldots(G.4)$$

Aquí $t_{95}(\nu'_{eff})$ se obtiene de la distribución t para ν'_{eff}, grados de libertad y p = 95 por ciento; ν'_{eff} es el número de grados efectivos de libertad calculados mediante la fórmula Welch-Satterthwaite [ecuación (G.2b)] considerando *únicamente* a los componentes s_i de la

incertidumbre estándar que han sido evaluados estadísticamente a partir de observaciones repetidas en la medición *que se lleva a cabo en ese momento*; en los términos $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f/\partial x_i$; y $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2(a_j^2/3)$ se toma en cuenta las otras componentes de la incertidumbre, aquí se supone que $+a_j$ y $-a_j$ son los límites superior e inferior, que se suponen perfectamente conocidos, de X_j relativa a su mejor estimación x_j (esto es, $x_j - a_j \leq X_j \leq x_j + a_j$)

NOTA

Una componente que se obtenga en base a observaciones repetidas hechas fuera del experimento que se lleva a cabo en ese momento se trata de la misma manera que cualquier otra componente incluida en u^2. Por ello con la finalidad de realizar una comparación, que tenga sentido, entre las ecuaciones (G.4) y (G.5) del siguiente sub capítulo se supone que, de existir tales componentes, son despreciables.

G.5.2 Si una incertidumbre expandida que define un intervalo con un nivel de confianza del 95 por ciento se evalúa de acuerdo con los métodos recomendados en G.3 y G.4, la expresión que resulta, en lugar de la ecuación (G.4),es

$$U_{95} = t_{95}(v_{eff})[s^2 + u^2]^{1/2} \qquad \ldots(G.5)$$

en donde v_{eff} se calcula a partir de la ecuación (G.2b) y en el cálculo se incluyen *todas* las componentes de incertidumbre.

En la mayoría de los casos, el valor U_{95} de la ecuación (G.5) será mayor que el valor U'_{95} de la ecuación (G.4), si se supone que, al evaluar la ecuación (G.5), todas las varianzas de Tipo B se obtienen a partir de distribuciones rectangulares *a priori* cuyos semi anchos son los mismos que los límites a_j usadas para calcular u_2 en la ecuación (G.4). Esto puede entenderse reconociendo que, aunque $t_{95}(v'_{eff})$ será en la mayoría de los casos mayor que $t_{95}(v_{eff})$ ambos valores están cercanos a 2; y que en la ecuación (G.5) u^2 se multiplica por $t_p^2(v_{eff}) \approx 4$, mientras que en la ecuación (G.4) es multiplicado por 3. A pesar de que las dos expresiones proporcionan valores iguales para U'_{95}, y U_{95} cuando $u^2 << s^2$, U'_{95} será menor hasta en un 13 por ciento que U_{95} si $u^2 >> s^2$. Por tanto, en general, la ecuación (G.4) proporciona una incertidumbre que define un intervalo que tiene un nivel de confianza menor que el intervalo definido por la incertidumbre expandida calculada utilizando la ecuación G.5 .

NOTAS

1. *En los límites $u^2/s^2 \to \infty$ y $v_{eff} \to \infty$, $U_{95} \to 1{,}732u$ mientras que $U_{95} \to 1{,}960u$. En este caso, U_{95}, define un intervalo que tiene un nivel de confianza de solamente un 91,7 por ciento, en tanto que U_{95} define un intervalo del 95 por ciento. Este caso*

se aproxima, en la práctica, cuando las componentes obtenidas a partir de estimaciones de límites inferior y superior son dominantes, numerosas, y tienen valores $u_j^2(y) = c_j^2\, a_j^2/3$ *de tamaño comparable.*

2. *Para una distribución normal, el factor de cobertura* $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ *define un intervalo con nivel de confianza* $p = 91{,}673...$ *por ciento. Este valor de p es bastante estable en el sentido de que es, en comparación con cualquier otro valor, óptimamente independiente de pequeñas desviaciones de la normalidad de las magnitudes de entrada.*

G.5.3 Ocasionalmente, una magnitud de entrada X_i, se distribuye asimétricamente - las desviaciones de un signo alrededor su valor esperado son más probables que las desviaciones del signo opuesto (véase 4.3.8). A pesar de que esto no establece una diferencia para la evaluación de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la estimación x_i de X_i, y por tanto en la evaluación de $u_c(y)$, sin embargo, sí puede afectar el cálculo de U.

Es usualmente conveniente proporcionar un intervalo simétrico, $Y = y \pm U$, a menos que el intrevalo sea tal que exista un costo diferencial entre las desviaciones de un signo con respecto a las del otro. Si la asimetría de X_i causa solamente una pequeña asimetría en la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de la medición y y su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$, la probabilidad perdida en un lado al establecer un intervalo simétrico es compensada por la probabilidad ganada en el otro lado. La alternativa es proporcionar un intervalo que sea simétrico en probabilidad (y por tanto, asimétrico en U): la probabilidad de que Y se encuentre por debajo del límite inferior $y - U_-$. es igual a la de que se encuentre por encima del límite superior $y - U_+$. Pero con la finalidad de establecer tales límites, es necesario conocer más información que simplemente las estimaciones y y $u_c(y)$ [y por tanto más información que las estimaciones x_i y $u(x_i)$ de cada magnitud de entrada X_i]-

G.5.4 La evaluación de la incertidumbre expandida U_p, dada aquí en términos de $u_c(y)$, ν_{eff} y el factor $t_p(\nu_{eff})$ a partir de la distribución t es únicamente una aproximación y tiene, por tanto, sus limitaciones. La distribución de $(y - Y) / u_c(y)$ está dada por la distribución t solamente si la distribución de Y es normal, la estimación y y su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ son independientes, y si la distribución de $u_c^2(y)$ es una distribución χ^2. La introducción de ν_{eff} ecuación (G.2b), tiene que ver únicamente con el último problema proporcionando una aproximada distribución χ^2 para $u_c^2(y)$; la otra parte del problema, que surge de la no normalidad de la distribución de Y, requiere de la consideración de momentos de orden superior, además de la varianza.

G.6 Resumen y conclusiones

G.6.1 El factor de cobertura k_p, que proporciona un intervalo con un nivel de confianza p cercano a un nivel especificado puede encontrarse únicamente si existe un extenso conocimiento de la distribución de probabilidad de cada magnitud de entrada y si esas distribuciones son combinadas para obtener la distribución de la magnitud de salida. Las estimaciones de entrada x_i y sus incertidumbres estándar $u(x_i)$ por sí mismas son insuficientes para este propósito.

G.6.2 Dado que la gran cantidad de cálculos necesarios para combinar las distribuciones de probabilidad, raramente se justifican por la extensión y la confiabilidad de la información disponible, entonces puede aceptarse una aproximación a la distribución de la magnitud de salida. Basándose en el Teorema del Límite Central, es, usualmente, suficiente asumir que la distribución de probabilidad de $(y - Y) / u_c(y)$ es la distribución t, y considerar que $k_p = t_p(\nu_{eff})$,con el factor t sustentado en los grados de libertad efectivos ν_{eff} de $u_c(y)$ obtenidos a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite, ecuación (G.2b).

G.6.3 Para obtener ν_{eff} de la ecuación (G.2b) se requiere conocer los grados de libertad ν_i para cada componente incertidumbre estándar. Para la componente obtenida de una evaluación de Tipo A, ν_i se obtiene a partir del número de observaciones repetidas independientes sobre las que se basa la correspondiente estimación de entrada y el número de magnitudes independientes determinadas a partir de estas observaciones (véase G.3.3). Para una componente obtenida de una evaluación de Tipo B , ν_i se obtiene de la confiabilidad atribuida, de manera razonable, al valor de tal componente [véase G.4.2 y ecuación (G.3)].

G.6.4 Así el siguiente es un resumen del método preferido para el cálculo de una incertidumbre expandida $U_p = k_p\ u_c(y)$, la cual se pretende que proporcione un intervalo $Y = y \pm U_p$ que tiene un nivel aproximado de confianza p:

1) Obtener y y $u_c(y)$ como se describe en los capítulos 4 y 5.

2) Calcular ν_{eff} a partir de la fórmula de Welch-Satterthwaite, ecuación (G.2b) (la que se repite aquí para fácil referencia) :

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^{\,4}(y)}{\sum_{i=l}^{N} \frac{u_i^{\,4}(y)}{\nu_i}} \qquad \ldots(G.2b)$$

Si $u(x_i)$ se obtiene a partir de una evaluación de Tipo A, determinar ν_i como se bosqueja en G.3.3. Si $u(x_i)$ se obtiene a partir de una evaluación de Tipo B y puede considerársele exactamente conocida, lo cual ocurre frecuentemente en la práctica, entonces $\nu_i \rightarrow \infty$; en cualquier otro caso, hay que estimar ν_i a partir de la ecuación (G.3).

3) Obtener el factor t, $t_p(\nu_{eff})$, para el nivel de confianza p deseado a partir de la tabla G.2. Si ν_{eff} no es un entero puede interpolarse o truncarse al entero menor más próximo.

4) Tomar $k_p = t_p(\nu_{eff})$ y calcular $U_p = k_p u_c(y)$

G.6.5 En ciertas situaciones, las cuales no deben ocurrir muy frecuentemente en la práctica, las condiciones requeridas por el Teorema del Límite Central pueden no ser bien satisfechas y la aproximación de G.6.4 pueden conducir a un resultado inaceptable. Por ejemplo, si $u_c(y)$ es dominada por una componente de la incertidumbre evaluada a partir de una distribución rectangular cuyos límites se asumen exactamente conocidos, es posible que [si $t_p(\nu_{eff}) > \sqrt{3}$] $y + U_p$ y $y - U_p$, los límites superior e inferior del intervalo definido por U_p, puedan quedar ubicados fuera de los límites de la distribución de probabilidad del mensurando Y. Tales casos deben ser considerados de manera particular aunque en algunas ocasiones es posible calcular una aproximación analítica (haciendo, por ejemplo, la convolución de una distribución normal con una distribución rectangular [10])

G.6.6 Las siguientes condiciones prevalecen en muchas mediciones prácticas en una gran gama de especialidades:

– la estimación y del mensurando Y se obtienen partir de las estimaciones x_i de un número significativo de magnitudes de entrada X_i que pueden describirse mediante distribuciones de probabilidad de "buen comportamiento" , tales como las distribuciones normal o rectangular;

- las incertidumbres estándar $u(x_i)$ de tales estimaciones, que pueden obtenerse a partir de evaluaciones de Tipo A o de Tipo B, contribuyen en magnitudes similares a la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ del resultado de la medición y;
- es adecuada la aproximación lineal implicada por la ley de propagación de la incertidumbre (véase 5.1.2 y E.3.1);
- la incertidumbre de $u_c(y)$ es razonablemente pequeña debido a que hay un gran número de grados efectivos de libertad ν_{eff}, digamos mayores que 10.

Bajo tales circunstancias, la distribución de probabilidad caracterizada por el resultado de la medición y su incertidumbre estándar combinada puede suponerse normal debido al Teorema del Límite Central; y $u_c(y)$ puede ser considerada como una estimación razonablemente confiable de la desviación estándar de tal distribución normal debido al considerable tamaño de ν_{eff}. Entonces, basándose en el análisis de este anexo, enfatizando la naturaleza aproximada del proceso de evaluación de la incertidumbre y la imposibilidad práctica de tratar de distinguir entre intervalos que tienen niveles de confianza que difieren en uno o dos por ciento, puede hacerse lo siguiente:

Elegir k= 2 y suponer que $U = 2u_c(y)$ define un intervalo cuyo nivel de confianza es aproximadamente el 95 %; ó, para aplicaciones más críticas, elegir k=3 y suponer que $U = 3u_c(y)$ define un intervalo cuyo nivel de confianza es aproximadamente 99 %.

Aunque esta aproximación debe ser adecuada para muchas mediciones prácticas, su aplicabilidad a alguna medición en particular dependerá de qué tan cercano esté k=2 de $t_{95}(\nu_{eff})$ o k=3 de $t_{99}(\nu_{eff})$; esto es de qué tan cercano esté el nivel de confianza del intervalo definido por $U = 2u_c(y)$ ó $U = 3u,(y)$ al 95 ó 99%, respectivamente. Aunque para $\nu_{eff} = 11$, k=2 y k=3 subestiman el valor de $t_{95}(11)$ y $t_{99}(11)$ por alrededor de únicamente 10 y 4%, respectivamente (véase la tabla G.2) esto puede no ser aceptable en algunos casos. Además para todos los valores de ν_{eff} mayores que 13 , k=3 produce un intervalo con un nivel de confianza mayor que 99 por ciento (véase la Tabla G.2 , que también muestra que para $\nu_{eff} \rightarrow \infty$ los niveles de confianza de los intervalos producidos por k=2 y k=3 son 95,45 y 99,73%, respectivamente). Entonces, en la práctica, el tamaño de ν_{eff} y lo que se requiere de la incertidumbre expandida determinarán si esta aproximación puede ser utilizada o no.

Tabla G.2

Valores de $t_p(\nu)$ de la distribución t para ν grados de libertad que definen un intervalo $-t_p(\nu)$ a $+ t_p(\nu)$ que incluyen la fracción p de la distribución

Grados de libertad	Fracción p en porcentaje					
ν	68,27[a]	90	95	95,45[a]	99	99,73[a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	287	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

(a) Para una magnitud z descrita mediante una distribución normal con esperanza u_z y desviación estándar σ, el intervalo $u_z \pm k\sigma$ incluye la fracción p=68,27; 95,45 y 99,73% de la distribución para k=1; 2 y 3 , respectivamente.

Anexo "H"

Ejemplos

Este anexo proporciona seis ejemplos, H. 1 a H.6, los cuales han sido resueltos de manera muy detallada a fin de ilustrar los principios básicos presentados en esta **Guía** para la evaluación y expresión de las incertidumbres en las mediciones. Estos ejemplos, junto con los incluidos en el texto principal y en algunos otros anexos, deberían permitir a los usuarios de esta **Guía** poner en práctica dichos principios en su propio trabajo.

Debido a que los ejemplos tienen un propósito ilustrativo, han sido necesariamente simplificados. Más aún, puesto que tanto los ejemplos como los datos numéricos usados en ellos han sido elegidos principalmente para demostrar los principios de esta **Guía**, ni unos ni otros deben necesariamente ser interpretados como la descripción de un proceso real de medición. Si bien los datos son usados como se presentan, a fin de prevenir errores de redondeo, se usan más dígitos de los que se muestran durante los cálculos intermedios. De esta manera, el resultado obtenido de un cálculo que involucra varias magnitudes puede diferir ligeramente del resultado implicado por los valores numéricos dados en el texto para esas magnitudes.

Se indicó en las primeras partes de esta **Guía** que la clasificación de los métodos usados para evaluar componentes de incertidumbre como de Tipo A o de Tipo B se hace únicamente por conveniencia; no se requiere para la determinación de la incertidumbre estándar combinada o de la incertidumbre expandida del resultado de una medición debido a que todas las componentes de incertidumbre, sin importar la manera en que sean evaluadas, se tratan de la misma manera (véase 3.3.4, 5.1.2, y E.3.7). Así, en los ejemplos, no se

identifica específicamente el método usado para evaluar una componente particular de incertidumbre, con el tipo de dicha componente. Sin embargo, será claro de la discusión si el componente es obtenido de una evaluación de Tipo A o de Tipo B.

H.1 Calibración de Bloque Patrón

Este ejemplo demuestra que aún una medición aparentemente simple puede involucrar aspectos sutiles de evaluación de incertidumbre.

H.1.1 El problema de medición

La longitud de un bloque patrón de valor nominal 50 mm se determina por comparación con un patrón conocido de la misma longitud nominal. La salida directa de la comparación de los dos bloques es la diferencia d de sus longitudes:

$$d = l\,(1+\alpha\theta) - l_s(1+\alpha_s\theta_s) \qquad \ldots(\text{H.1})$$

donde :

l es el mensurando, esto es, la longitud a 20°C del bloque a calibrar;

l_s es la longitud del patrón a 20 °C dada en su certificado de calibración;

α y α_s son los coeficientes de expansión térmica del bloque a calibrar y del patrón, respectivamente;

θ y θ_s, son las desviaciones en temperatura respecto de los 20°C , tomados como temperatura de referencia, del bloque a calibrar y del patrón, respectivamente.

H.1.2 El modelo matemático

De la ecuación (H. 1), el mensurando está dado por

$$l = \frac{l_s(1+\alpha_s\theta_s)+d}{(1+\alpha\theta)} \qquad \ldots(\text{H.2})$$

$$= l_s + d + l_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta) + \ldots$$

Si la diferencia de temperatura entre el bloque a calibrar y el patrón es $\delta\theta = \theta - \theta_s$, y la diferencia entre sus coeficientes de expansión térmica es $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$, entonces la ecuación (H.2) se convierte en

$$l = f(l_s, d, \alpha_s, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \qquad \ldots(H.3)$$

$$= l_s + d - l_s\left[(\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta\theta)\right]$$

Las diferencias $\delta\theta$ y $\delta\alpha$ se consideran iguales a cero, mas no así sus incertidumbres; y se asume que $\delta\alpha$, α_s, $\delta\theta$, y θ no están correlacionadas. (Si el mensurando se expresara en términos de las variables θ, θ_s, α y α_s sería necesario incluir la correlación entre θ y θ_s, y entre α y α_s.)

Se sigue entonces, de la ecuación (H.3), que la estimación del valor del mensurando l puede obtenerse de la expresión simple $l_s + \bar{d}$, donde l_s es la longitud del patrón a 20°C, dada en su certificado de calibración, y $\bar{d}$ se estima mediante la media aritmética de $n=5$ observaciones repetidas e independientes. La incertidumbre combinada $u_c(l)$ de l se obtiene mediante la aplicación de la ecuación (10) en 5.1.2 a la ecuación (H.3), como se discute enseguida.

NOTA

En este y en los otros ejemplos, por simplicidad de notación, el mismo símbolo se usa para representar a una magnitud cualquiera y a la estimación correspondiente.

H.1.3 Contribución de varianzas

Los aspectos pertinentes de este ejemplo discutidos en ése y en los siguientes sub capítulos, se resumen en la tabla H.1.

Ya que se asume que $\delta\alpha = 0$ y $\delta\theta = 0$, la aplicación de la ecuación (10) en 5.1.2 a la ecuación (H. 3) da como resultado

$$u_c^2(l) = c_s^2 u^2(l_s) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha s}^2 u^2(\alpha_s) \qquad \ldots(H.4)$$
$$+ c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta)$$

donde

$c_s = \partial f/\partial l_s = 1-(\delta\alpha\theta + \alpha_s \cdot \delta\theta) = 1$

$c_d = \partial f/\partial d = 1$

$c_{\alpha_s} = \partial f/\partial \alpha s = -\, l s \delta\theta = 0$

$c_\theta = \partial f/\partial \theta = -l_s \delta_\alpha = 0$

$c_{\delta\alpha} = \partial f/\partial \delta\alpha = -l_s \theta$

$c_{\delta\theta} = \partial f/\partial \delta\theta = -l_s \alpha_s$

y, por tanto

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) \qquad \ldots(H.5)$$

$$+ l_s^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_s^2 \alpha_s^2 u^2(\delta\theta)$$

H.1.3.1 Incertidumbre de la calibración del patrón, *u* (*ls*)

En el certificado de calibración se indica que la incertidumbre expandida del patrón es $U = 0{,}075\mu$m, y se establece que fue obtenida usando un factor de cobertura de k = 3. La incertidumbre es entonces

$$u(ls) = (0{,}075\mu m)/3 = 25nm$$

H.1.3.2 Incertidumbre de la medición de la diferencia de longitudes, *u*(d)

La desviación estándar experimental ponderada característica de la comparación de l y l_s se determina a partir de la variabilidad de 25 observaciones repetidas independientes de la diferencia de longitud de dos bloques patrón, encontrándose que era igual a 13nm. En la comparación de este ejemplo, se tomaron cinco observaciones repetidas. La incertidumbre estándar asociada con la media aritmética de estas lecturas es entonces (véase 4.2.4).

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13nm)/\sqrt{5} = 5{,}8nm$$

De acuerdo al certificado de calibración del comparador usado para determinar la diferencia entre l y l_s, su incertidumbre "debido a errores aleatorios" es ± 0,01 μm al nivel de confianza del 95 por ciento y está basado en 6 mediciones repetidas, de esta manera la incertidumbre estándar, usando el factor t, $t_{95}(5) = 2{,}57$, para $\nu = 6 - 1 = 5$ grados de libertad (véase anexo G, tabla G.2), es

$$u(d_1) = (0{,}01_{\mu m})/2{,}57 = 3{,}9\,nm$$

La incertidumbre del comparador "debido a errores sistemáticos" se da en el certificado como 0,02 μm al nivel de tres sigma. Entonces se puede tomar que la incertidumbre estándar debido a esta causa es: $u(d_2) = (0{,}02\ \mu m)/3 = 6{,}7$ nm. La contribución total se obtiene de la suma de las varianzas estimadas:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ nm^2$$

o

$$u(d) = 9{,}7\ nm$$

H.1.3.3 Incertidumbre del coeficiente de expansión térmica, $u(\alpha_s)$

El coeficiente de expansión térmica del bloque patrón está dado como $\alpha_s = 11{,}5 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$ con una incertidumbre representada por una distribución rectangular con límites $\pm 2 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$. La incertidumbre estándar es entonces [véase ecuación (7) en 4.3.7]

$$u(\alpha_s) = (2x10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1})/\sqrt{3} = 1{,}2x10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1}$$

Ya que $c_{\alpha s} = \partial f/\partial\alpha_s = -l_s\delta\theta = 0$ como se indicó en H. 1.3, esta incertidumbre no contribuye en nada a la incertidumbre de l en el primer orden. Tiene, sin embargo, una contribución de segundo orden que es discutida en H. 1.7.

Tabla H.1 – Resumen de las componentes de la incertidumbre estándar

Componentes de la incertidumbre estándar $u(x_i)$	Fuente de la incertidumbre	Valor de la incertidumbre estándar $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f/\partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (nm)	Grados de libertad
$u(l_s)$	Calibración del bloque patrón	25 nm	1	25	18
$u(d)$ $u(\bar{d})$ $u(d_1)$ $u(d_2)$	Diferencia medida entre los bloques observaciones repetidas efectos aleatorios del comparador efectos sistemáticos en el comparador	9,7 nm 5,8 nm 3,9 nm 6,7 nm	1	9,7	25,6 24 5 8
$u(\alpha_s)$	Coeficiente de expansión térmica del bloque patrón	$1{,}2 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	0	0	
$u(\theta)$ $u(\bar{\theta})$ $u(\Delta)$	Temperatura del banco de ensayo Temperatura media del banco Variación cíclica de temperatura del laboratorio	0,41 °C 0,2 °C 0,35 °C	0	0	
$u(\delta\alpha)$	Diferencia en los coeficientes de expansión de los bloques	$0{,}58 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$-l_s\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Diferencia en la temperatura de los bloques	0,029 °C	$-l_s\alpha_s$	16,6	2
				$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002\text{nm}2$ $u_c(l) = 32$ nm $\nu_{eff}(l) = 16$	

H.1.3.4 Incertidumbre de la desviación de temperatura del bloque patrón $u(\theta)$

La temperatura del banco de ensayo se reporta como (19,9 ± 0,5) °C; la temperatura en el momento de las observaciones individuales no fue registrada. Se dice que la desviación (offset) máxima observada, Δ = 0,5 °C representa la amplitud de una variación aproximadamente cíclica de la temperatura utilizando un sistema termostático, no la incertidumbre de la temperatura media. El valor de la desviación de la temperatura media

$$\bar{\theta} = 19{,}9°C - 20°C = -0{,}1°C$$

se reporta diciendo que ella misma contiene una incertidumbre estándar debido a la incertidumbre en la temperatura media del banco de ensayo de $u(\bar{\theta}) = 0{,}2°C$.

En tanto que la variación cíclica en el tiempo produce una distribución de temperatura en forma de *U* (arcoseno) resultando en una incertidumbre estándar de

$$u(\Delta) = (0{,}5^{\circ}C)/\sqrt{2} = 0{,}35^{\circ}C$$

La desviación de temperatura θ puede considerarse igual a θ, y la incertidumbre estándar de θ se obtiene de

$$u^2(\theta) = u^2(\overline{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165^{\circ}C^2$$

de donde resulta

$$u(\theta) = 0{,}41^{\circ}C$$

Ya que $c_\theta = \partial f/\partial\theta = -\,l_s\delta\alpha = 0$ como se indicó en H.1.3, esta incertidumbre tampoco contribuye en nada a la incertidumbre de primer orden, sin embargo, tiene una contribución de segundo orden que se discute en H.1.7

H. 1.3.5 Incertidumbre de la diferencia en los coeficientes de expansión térmica, *u*(δα)

Los límites estimados de la variabilidad de δα son ± 1 x 10^{-6} °C^{-1}, con la misma probabilidad de que δα tome cualquier valor dentro de estos límites. La incertidumbre estándar es

$$u(\delta\alpha) = (1x10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58x10^{-6}\,{}^{\circ}C^{-1}$$

H.1.3.6 Incertidumbre en la diferencia de las temperaturas de los bloques, *u*(δθ)

Se espera que el patrón y el bloque a calibrar estén a la misma temperatura, pero la diferencia de temperatura puede estar con igual probabilidad en cualquier punto dentro del intervalo estimado de –0,05 °C a +0,05 °C. La incertidumbre estándar es

$$u(\delta\theta) = (0{,}05^{\circ}C)/\sqrt{3} = 0{,}029^{\circ}C$$

H.1.4 Incertidumbre estándar combinada

La incertidumbre estándar combinada $u_c(l)$ se calcula a partir de la ecuación (H.5). Los términos individuales son obtenidos y substituidos en esta ecuación obteniéndose

$$u_c^2(l) = (25\text{nm})^2 + (9{,}7\text{nm})^2 \qquad \ldots(\text{H.6a})$$

$$+ (0{,}05\text{m})^2\,(-0{,}1°\text{C})^2\,(0{,}58\text{x}10^{-6}\,°\text{C}^{-1})^2$$

$$+ (0{,}05\text{m})^2\,(11{,}5 \text{ x } 10^{-6}\,°\text{C}^{-1})^2(0{,}029°\text{C})^2$$

$$= (25\text{nm})^2 + (9{,}7\text{ nm})^2$$

$$+ (2{,}9\text{ nm})^2 + (16{,}6\text{nm})^2$$

$$\ldots(\text{H.6b})$$

$$= 1002\text{nm}^2$$

o

$$u_c(l) = 32\text{nm} \qquad \ldots(\text{H.6c})$$

La componente dominante de la incertidumbre es obviamente la del patrón, $u(l_s)$=25 nm.

H.1.5 Resultado final

El certificado de calibración para el bloque patrón indica que la longitud a 20 °C es l_s=50,000 623 nm. La media aritmética $\overline{d}$ de las cinco observaciones repetidas de la diferencia en longitudes entre el bloque desconocido y el bloque patrón es 215 nm. Así, puesto que $l = l_s + \overline{d}$ (véase H. 1.2), la longitud l del bloque desconocido a 20 °C es 50,000 838 mm. De acuerdo con 7.2.2, el resultado final de la medición puede establecerse como:

l = 50,000 838 mm con una incertidumbre estándar combinada u_c = 32 nm. La correspondiente incertidumbre estándar combinada relativa es $u_c/l = 6{,}4 \text{ x } 10^{-7}$.

H.1.6 Incertidumbre expandida

Supóngase que se requiere obtener una incertidumbre expandida $U_{99} = k_{99}u_c(l)$ que proporciona un intervalo con un nivel de confianza de, aproximadamente, 99 por ciento. El procedimiento a usar está resumido en G.6.4, y los grados de libertad requeridos están indicados en la tabla H.1. Estos se obtuvieron como se muestra a continuación:

1) *Incertidumbre de la calibración del patrón*, $u(l_s)$ [H. l. 3. 1]. El certificado de calibración establece que el número de grados de libertad efectivos de la incertidumbre estándar combinada a partir de los cuales se obtuvo la incertidumbre expandida citada es $\nu_{eff}(l_s) = 18$.

2) *Incertidumbre de la diferencia en las longitudes medidas*, $u(d)$ [1.3.2]. A pesar de que $\bar{d}$ se obtuvo a partir de cinco observaciones repetidas los grados de libertad de $u(\bar{d})$ son $\nu(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$, dado que $u(\bar{d})$ se obtuvo de una desviación estándar experimental ponderada basada en 25 observaciones (véase la nota de H.3.6). Los grados de libertad de $u(d_1)$, la incertidumbre debida a efectos aleatorios del comparador, son $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$ puesto que d_1 se obtuvo de seis mediciones repetidas. La incertidumbre para los efectos sistemáticos en el comparador, igual a $\pm$ 0,02 μm, puede asumirse confiable en un 25 por ciento, y, de esta forma, los grados de libertad de la ecuación (G.3) en G.4.2 son $\nu(d_2) = 8$ (véase el ejemplo de G.4.2). Los grados de libertad efectivos de $u(d)$, $\nu_{eff}(d)$, se obtienen entonces de la ecuación (G.2b) en G.4.1:

$$\nu_{eff}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\dfrac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})} + \dfrac{u^4(d^1)}{\nu(d_1)} + \dfrac{u^4(d^2)}{\nu(d^2)}}$$

$$= \frac{(9{,}7\,nm)^4}{\dfrac{(5{,}8\,nm)^4}{24} + \dfrac{(3{,}9\,nm)^4}{5} + \dfrac{(6{,}7\,nm)^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Incertidumbre de la diferencia de los coeficientes de expansión*, $u(\delta\alpha)$ [H. 1.3.5]. Los límites estimados de $\pm$ 1x10^{-6}°C^{-1} de la variabilidad de $\delta\alpha$ se consideran confiables en un 10 por ciento. Esto da, de la ecuación (G.3) en G.4.2, $\nu(\delta\alpha) = 50$.

4) *Incertidumbre de la diferencia de temperatura en los bloques*, $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. El intervalo estimado de –0,05 °C a + 0,05 °C para la diferencia de temperatura $\delta\theta$ se cree confiable solamente al 50 por ciento, lo cual, utilizando la ecuación (G.3) en G.4.2, da $\nu(\delta\theta) = 2$.

El cálculo de $\nu_{eff}(l)$ a partir de la ecuación (G.2b) en G.4.1 se hace de la misma manera que el cálculo de ν_{eff} *(d)* en 2) de esta sección. De esta forma, de las ecuaciones (H.6b) y de (H.6c) y los valores dados para ν de 1) a 4), se obtiene

$$\nu_{eff}(l) = \frac{(32\,nm)^4}{\frac{(25\,nm)^4}{18} + \frac{(9{,}7\,nm)^4}{25{,}6} + \frac{(2{,}9\,nm)^4}{50} + \frac{(16{,}6\,nm)^4}{2}}$$

$$= 16{,}7$$

Para obtener la incertidumbre expandida requerida, este valor se trunca primero al entero menor más cercano ,$\nu_{eff}(l) = 16$. De aquí se sigue, a partir de la tabla G.2 en el anexo G, que $t_{99}(16) = 2{,}92$. y, entonces, $U_{99} = = t_{99}(16)\,u_c(l) = 2.92\text{x}(32\text{ nm}) = 93$ nm. De acuerdo con 7.2.4, el resultado final de la medición puede anunciarse como:

> $l = (50{,}000\,838 \pm 0{,}000\,093)$ mm, donde el número que sigue al símbolo ± es el valor numérico de una incertidumbre expandida $U = ku_c$, con U determinada a partir de una incertidumbre estándar combinada $u_c = 32$ nm y un factor de cobertura $k = 2{,}92$ basado en la distribución t para $\nu = 16$ grados de libertad, y que define un intervalo con un nivel de confianza estimado del 99 por ciento La incertidumbre expandida relativa correspondiente es $U/l = 1{,}9 \times 10^{-6}$.

H. 1.7 Términos de segundo orden

La nota en 5. 1.2 indica que la ecuación (10), la cual es usada en este ejemplo para obtener la incertidumbre estándar combinada $u_c(l)$, debe aumentar cuando la no linealidad de la función $Y = f(X_1\ X_2, \ldots, X_N)$ es tan significativa que los términos de mayor orden en la serie de Taylor no pueden ser ignorados. Tal es el caso en este ejemplo, y de ahí que la evaluación de $u_c(l)$ como se presentó hasta este punto no esté completa. Aplicando a la ecuación (H.3) la expresión dada en la nota de 5.1.2 produce, de hecho, dos términos distintos de segundo orden que no son despreciables, los cuales deben ser añadidos a la ecuación (H.5). Estos términos, que surgen del término cuadrático en la expresión de dicha nota, son

$$l_s^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_s^2 u^2(\alpha_s) u^2(\delta\theta)$$

pero solamente el primer término contribuye significativamente a $u_c(l)$

$$l_s u(\delta\alpha) u(\theta) = (0{,}05m)(0{,}58x10^{-6}°C^{-1})(0{,}41°C)$$

$$= 11{,}7\text{nm}$$

$$l_s u(\alpha_s) u(\delta\theta) = (0{,}05m)(1{,}2x10^{-6}°C^{-1})(0{,}029°C)$$

$$= 1{,}7\text{nm}$$

Los términos de segundo orden incrementan a $u_c(l)$ de 32 nm a 34 nm.

H.2 Medición simultánea de resistencia y reactancia

Este ejemplo demuestra el tratamiento de múltiples mensurandos o magnitudes de salida determinados simultáneamente en la misma medición, y la correlación de sus estimaciones. Se consideran solamente las variaciones aleatorias de las observaciones; en la práctica real, las incertidumbres de las correcciones por efectos sistemáticos contribuirían, también, a la incertidumbre de los resultados de medición. Los datos son analizados en dos formas diferentes obteniéndose en cada caso, esencialmente, los mismos valores numéricos.

H.2.1 El problema de medición

La resistencia R y la reactancia X de un elemento de un circuito se determinan midiendo la amplitud V de una diferencia de potencial alterno sinusoidal en sus terminales, la amplitud I de la corriente alterna que pasa a través suyo, y el desfase ϕ entre la diferencia de potencial alterna y la corriente alterna. De esta manera, las magnitudes de entrada que se miden son V, I y ϕ y las tres magnitudes de salida –los mensurandos– son las tres componentes de la impedancia *R, X y Z.* Ya que $Z^2 = R^2 + X^2$, existen solamente dos magnitudes independientes.

H.2.2 El modelo matemático y los datos

Los mensurandos están relacionados a las magnitudes de entrada mediante la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I}\cos\Phi; X = \frac{V}{I}\operatorname{sen}\Phi; Z = \frac{V}{I} \qquad \ldots(H.7)$$

Considérese que cinco conjuntos independientes de observaciones simultáneas de las tres magnitudes de entrada *V, I* y ϕ se obtienen bajo condiciones de repetibilidad (véase B.2.15), resultando los datos dados en la tabla H.2. También se dan las medias aritméticas de las observaciones y las desviaciones estándar experimentales de estas medias calculadas a partir de las ecuaciones (3) y (5) en 4.2 . Las medias son consideradas como las mejores estimaciones de los valores esperados de las magnitudes de entrada, y las desviaciones estándar experimentales son las incertidumbres estándar de dichas medias.

Ya que las medias $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$ se obtienen de observaciones simultáneas, están correlacionadas y las correlaciones deben ser tomadas en cuenta en la evaluación de las incertidumbres estándar de los mensurandos *R, X* y *Z*. Los coeficientes de correlación requeridos se obtienen de manera inmediata a partir de la ecuación (14) en 5.2.2 usando los valores de s($\overline{V}$, $\overline{I}$), s($\overline{V}$, $\overline{\phi}$) y s($\overline{I}$, $\overline{\phi}$) calculados de la ecuación (17) en 5.2.3. Los resultados están incluidos en la tabla H.2, donde debe notarse que $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)$ y $r(x_i,x_i) = 1$.

H.2.3 Resultados: Primera aproximación

La primera aproximación está resumida en la tabla H.3.

Los valores de los tres mensurandos *R, X* y *Z* se obtienen a partir de las relaciones dadas en la ecuación (H.7) usando los valores medios de $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$ de la tabla H.2 para V, I y ϕ. Las incertidumbres estándar de *R, X* y *Z* se obtienen de la ecuación (16) en 5.2.2 puesto que, como se indicó anteriormente, las magnitudes de entrada $\overline{V}$, $\overline{I}$ y $\overline{\phi}$ están correlacionadas. Como ejemplo, considere Z= $\overline{V}/\overline{I}$. Identificando $\overline{V}$ con x_1 ; $\overline{I}$ con x_2 y f con $Z = V/\overline{I}$, la ecuación (16) en 5.2.2 da, para la incertidumbre estándar combinada de *Z*.

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\bar{I}}\right]^2 u^2(\bar{V}) + \left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right]^2 u^2(\bar{I}) \qquad \ldots(H.8a)$$

$$+ 2\left[\frac{1}{\bar{I}}\right]\left[\frac{-\bar{V}}{\bar{I}^2}\right] u(\bar{V})\, u(\bar{I})\, r(\bar{V}, \bar{I})$$

$$= Z^2\left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right]^2 \qquad \ldots(H.8b)$$

$$- 2Z^2\left[\frac{u\bar{V})}{\bar{V}}\right]\left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right] r(\bar{V}, \bar{I})$$

o

$$u_{c,r}{}^2(\bar{Z}) = u_r{}^2(\bar{V}) + u_r{}^2(\bar{I}) \qquad \ldots(H.8C)$$

$$- 2\, u_r(\bar{V})\, u_r(\bar{I})\, r(\bar{V}, \bar{I})$$

donde u($\bar{V}$) = s($\bar{V}$), u($\bar{I}$) = s($\bar{I}$) , y el subíndice *"r"* en la última expresión índica que *u* es una incertidumbre relativa. La substitución de los valores apropiados de la tabla.H.2 en la ecuación (H. 8a) da como resultado, entonces $u_c(Z)$ = 0,236 Ω.

Ya que los tres mensurandos o magnitudes de salida dependen de las mismas magnitudes de entrada, también están correlacionados entre sí. Los elementos de la matriz de covarianza que describe esta correlación puede ser escrita en general como

$$u(y_1, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}\, u(x_i)\, u(x_j)\, r(x_i, x_j) \qquad \ldots(H.9)$$

donde y_1, = f_l (x_1 , x_2 .... , x_N) y y_m = f_m (x_1, x_2....,x_N). La ecuación (H.9) es una generalización de la ecuación (F.2) en F.1.2.3 cuando las q_l, en esta expresión están correlacionadas. Los coeficientes de correlación estimados de las magnitudes de salida están dados por r(y_l, y_m) = *u*(y_l, y_m) / *u*(y_l) *u*(y_m), como se indicó en la ecuación (14) en 5.2.2. Debe notarse que los

elementos de la diagonal de la matriz de covarianza , $u(y_l , y_l) \equiv u^2(y_l)$, son las varianzas estimadas de las magnitudes de salida y_1 (véase 5.2.2, nota 2) y que para $m = 1$, la ecuación (H.9) es idéntica a la ecuación (16) en 5.2.2.

Para aplicar la ecuación (H.9) a este ejemplo, se hacen los siguientes cambios de variable:

$$y_1 = R \quad x_1 = \overline{V} \qquad u(x_i) = s(x_i)$$
$$y_2 = X \quad x_2 = \overline{I} \qquad N = 3$$
$$y_3 = Z \quad x_3 = \overline{\phi}$$

Los resultados de los cálculos de *R, X* y *Z* y de sus varianzas estimadas así como de sus coeficientes de correlación se dan en la tabla H.3.

H.2.4 Resultados: segunda aproximación.

La segunda aproximación está resumida en la tabla H.4.

Ya que los datos han sido obtenidos como cinco conjuntos de observaciones de los tres magnitudes de entrada *V, I* y ϕ, es posible calcular un valor para R, X y Z a partir de *cada conjunto* de datos de medición, y entonces tomar la media aritmética de los cinco valores individuales para obtener la mejor estimación de *R, X* y *Z*. La desviación estándar experimental de cada media (la cual es su incertidumbre estándar combinada) se calcula entonces a partir de los cinco valores individuales en la forma usual [ecuación (5) en 4.2.3] ; y las covarianzas estimadas de las tres medias se calculan aplicando la ecuación (17) en 5.2.3 directamente a los cinco valores individuales a partir de los cuales se obtuvo cada media.

Tabla H.2 – Valor de las magnitudes de entrada *V, I* y ϕ obtenidos a partir de cinco conjuntos de observaciones simultáneas.

Conjunto Número k	Argumentos		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Media Aritmética	$\overline{V} = 4{,}9990$	$\overline{I} = 19{,}6610$	$\overline{\phi} = 1{,}044\,46$
Desviación estándar experimental de la media	$s(\overline{V}) = 0{,}0032$	$s(\overline{I}) = 0{,}0095$	$s(\overline{\phi}) = 0{,}000\,75$
Coeficientes de correlación			
$r(\overline{V}, \overline{I}) = -0{,}36$ $r(\overline{V}, \overline{\phi}) = 0{,}86$ $r(\overline{I}, \overline{\phi}) = -0{,}65$			

No hay diferencias en los valores de salida, las incertidumbres estándar y las covarianzas estimadas obtenidas a partir de ambas aproximaciones, excepto por los efectos de segundo orden asociados con el reemplazo de los términos tales como $\overline{V}/\overline{I}$ y $cos(\overline{\phi})$ por

$$\overline{V/I} \quad y \quad \overline{\cos\phi}$$

Para demostrar esta aproximación, la tabla H.4 da los valores de *R, X* y *Z* calculados a partir de cada uno de los cinco conjuntos de observaciones. Las medias aritméticas, la incertidumbre estándar y los coeficientes de correlación estimado se calculan, entonces, directamente

utilizando esos valores individuales. Los resultados numéricos obtenidos de esta forma difieren, de manera despreciable. de los resultados dados en la tabla H.3.

En la terminología de la nota 4.1.4, la segunda aproximación es un ejemplo de como se obtiene la estimación de *y*, a partir de $\overline{Y} = (\sum^{n}_{k=1}, Y_k)/n$, en tanto que la primera aproximación es un ejemplo de como se obtiene *y* a partir de $y = f(\overline{X}_1, X_2 \ldots\ldots \overline{X}_N)$. Como se indicó en esa nota, en general, las dos aproximaciones darán resultados *idénticos* si *f* es una función lineal de sus magnitudes de entrada (siempre y cuando se tomen en cuenta los coeficientes de correlación observados experimentalmente cuando se implementa la primera aproximación). Si *f* no es una función lineal entonces los resultados de la primera aproximación serán diferentes de los de la segunda aproximación dependiendo del grado de no linealiidad y las varianzas y covarianzas estimadas de las X_i. Esto puede verse en la expresión

$$y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_N)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{X}_i \partial \overline{X}_j} u(\overline{X}_i, \overline{X}_j) + \ldots \qquad \ldots(H.10)$$

donde el segundo término en el miembro derecho está compuesto por los términos de segundo orden en la expansión en serie de Taylor de *f* en términos de los X_i, (véase también la nota de 5.1.2). En el caso presente se prefiere la segunda aproximación ya que evita la aproximación $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2 \ldots\ldots \overline{X}_N)$ y refleja mejor el procedimiento usado – los datos fueron de hecho recolectados en conjuntos.

Tabla H.3 – Valores calculados de las magnitudes de salida *R, X* y Z: primera aproximación.

Indice de Mensurando *l*	Relación entre la estimación del mensurando y_i y la estimación de entrada x_i	Valor de la estimación de y_l, la cual es el resultado de la medición	Incertidumbre estándar combinada u_c (y_i) del resultado de la medición
1	$y_1=R=(\overline{V}/\overline{I})\cos\overline{\phi}$	$y_1=R=$ 127,732Ω	$u_c(R)=0{,}071\Omega$ $u_c(R)/R=0{,}06x10^{-2}$
2	$y_2=X=(\overline{V}/\overline{I})sen\ \overline{\phi}$	$y_2=X=$ 219,847Ω	$uc(X)=0{,}295\Omega$ $u_c(X)/X=0{,}13x10^{-2}$
3	$y_3=Z=\overline{V}/\overline{I}$	$y_3=Z=$ $254{,}260\Omega$	$u_c(Z)=0{,}236\Omega$ $u_c(Z)/Z=0{,}09x10^{-2}$
Coeficientes de correlación $r(y_l,y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R,X) = -0{,}588$ $r(y_1, y_3) = r(R,Z) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(X,Z) = 0{,}993$			

Tabla H.4 – Valores calculados de las magnitudes de salida *R, X* y *Z*; segunda aproximación.

Conjunto número k	Valores Individuales de los mensurandos		
	R(V/I) Cos ϕ (Ω)	X(V/I) Sen ϕ (Ω)	Z(V/I) (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	128,89	219,72	254,29
3	127,51	220,64	254,89
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Media Aritmética	$y_1 = \overline{R} =$ 127,732	$y_2 = \overline{X} =$ 219,847	$y_3 = \overline{Z} =$ 254,260
Desviación estándar experimental de la media	$s(\overline{R}) = 0{,}071$	$s(\overline{X}) = 0{,}295$	$s(\overline{Z}) = 0{,}236$
Coeficientes de correlación			
$(y_1, y_2) = r(\overline{R}, \overline{X}) = -0{,}588$ $(y_1, y_3) = r(\overline{R}, \overline{Z}) = -0{,}485$ $(y_2, y_3) = r(\overline{X}, \overline{Z}) = -0{,}993$			

Por otro lado, la segunda aproximación podría ser inapropiado si los datos de la tabla H.2 representaran $n_1=5$ observaciones de la diferencia de potencial *V*, seguidos por $n_2=5$ observaciones de la corriente *I*, y después por $n_3 = 5$ observaciones de la fase ϕ, y sería imposible si $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (Es, de hecho, un pobre procedimiento de calibración el realizar las mediciones de esta manera ya que la diferencia de potencial a través de una impedancia fija y la corriente a través de ésta, están relacionadas directamente.)

Si los datos de la tabla H.2 se reinterpretan de esta manera de modo que la segunda aproximación es inapropiada, y si se asume que no hay correlación entre las magnitudes *V, I* y ϕ , entonces los coeficientes de correlación observados no tienen significado y deben ser iguales

a cero. Si se hace esto en la tabla H.2, la ecuación (H.9) se reduce a una ecuación equivalente a (F.2) en F. 1.2.3, es decir,

$$u(y_1, y_m) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i) \qquad \ldots(H.11)$$

y su aplicación a los datos de la tabla H.2 da lugar a los cambios en la tabla H.3 que se muestran en la tabla H.5.

Tabla H.5 – Cambios en la tabla H.3 suponiendo que los coeficientes de correlación de la tabla H.2 son cero,

Incertidumbre estándar combinada $u_c(y_2)$ del resultado de la medición
$u_c(R) = 0{,}195\Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0{,}204\Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08 \times 10^{-2}$
Coeficientes de correlación $r(y_1, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R,X) = 0{,}056$ $r(y_1, y_3) = r(R,Z) = 0{,}527$ $r(y_2, y_3) = r(X,Z) = 0{,}878$

H.3 Calibración de un termómetro

Este ejemplo ilustra el uso del método de mínimos cuadrados para obtener una curva de calibración lineal, y cómo se usan los parámetros del ajuste, la ordenada en el origen y la pendiente, y sus varianzas y covarianzas estimadas, para obtener el valor y la incertidumbre estándar de una corrección predicha a partir de la curva.

H.3.1 El problema de medición

Un termómetro se calibra comparando $n=11$ lecturas de la temperatura t_k, cada una teniendo una incertidumbre despreciable, con las temperaturas de referencia correspondientes conocidas $t_{R.k}$ en el intervalo de temperatura de 21 °C a 27 °C para obtener las correcciones $b_k=t_{R.k}-t_k$ para las lecturas. Las correcciones *medidas* b_k y las temperaturas *medidas* t_k son las magnitudes de entrada de la evaluación. Una curva de calibración lineal

$$b(t) = y_1 + y_2 (t - t_0) \qquad \ldots(H.12)$$

es ajustada para las correcciones y temperaturas medidas, utilizando el método de los mínimos cuadrados. Los parámetros y_1 y y_2 los cuales son, respectivamente, la ordenada en el origen y la pendiente de la curva de calibración, son las dos magnitudes de salida a determinar. La temperatura t_0 es una temperatura de referencia exacta elegida convenientemente; no es un parámetro independiente que vaya a ser determinado mediante el ajuste por mínimos cuadrados. Una vez que y_1 y y_2 son determinados, junto con sus varianzas y covarianzas estimadas, la ecuación (H. 12) puede usarse para predecir el valor y la incertidumbre estándar de la corrección que se aplicará al termómetro para cualquier valor t de la temperatura.

H.3.2. Ajuste por mínimos cuadrados

Basándose en el método de los mínimos cuadrados, y bajo las consideraciones hechas en H.3.1, las magnitudes de salida y_1 y y_2 y sus varianzas y covarianzas estimadas se obtienen al minimizar la suma

$$S=\sum_{k=1}^{n}[b_k - y_1 - y_2(t_k - t_o)]^2$$

Esto da como resultado las siguientes ecuaciones para y_1 y y_2, sus varianzas experimentales $s^2(y_1)$ y $s^2(y_2)$, y sus coeficientes de correlación estimados $r(y_1, y_2) = s(y_1,y_2) / s(y_1)\, s(y_2)$, donde $s(y_1, y_2)$ es su covarianza estimada:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad \ldots(H.13a)$$

$$y_2 = \frac{n\sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \qquad \ldots(H.13b)$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \qquad \ldots(H.13c)$$

$$s^2(y^2) = n\frac{s^2}{D} \qquad \ldots(H.13d)$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\sum \theta_k^2}} \qquad \ldots(H.13e)$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n-2} \qquad \ldots(H.13f)$$

$$D = n\sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 \qquad \ldots(H.13g)$$

$$= n\sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n\sum (t_k - \bar{t})^2$$

donde todas las sumas van desde k = 1 hasta n, $\theta_k = t_k - t_o$, $\bar{\theta} = (\sum\theta_k) / n$, y $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ es la diferencia entre la corrección medida u observada b_k a la temperatura t_k, y la corrección $b(t_k)$ predicha por la curva ajustada $b(t) = y_1 + y_2(t - t_o)$ a t_k. La varianza s^2 es una medida de la incertidumbre total del ajuste, donde el factor $n - 2$ refleja el hecho de que, debido a que dos parámetros, y_1 y y_2, se determinan mediante las n observaciones, los grados de libertad de s^2 son $\nu = n - 2$ (véase G.3.3).

H.3.3 Cálculo de resultados

Los datos que serán ajustados se dan en la segunda y tercer columna de la tabla H.6. Tomando t_o = 20 °C como la temperatura de referencia, la aplicación de las ecuaciones (H. 13a) a (H. 13g) da como resultado:

$$y_1 = -0{,}1712\ °C \qquad s(y_1) = 0{,}0029\ °C$$
$$y_2 = 0{,}002\ 18 \qquad s(y_2) = 0{,}000\ 67$$
$$r(y_1, y_2) = -0{,}930 \qquad s = 0{,}0035\ °C$$

El hecho de que la pendiente y_2 es más de tres veces mayor que su incertidumbre estándar proporciona una indicación de que se requiere de una curva de calibración y no una corrección promedio fija.

La curva de calibración puede ser entonces escrita como:

$$b(t) = -\ 0{,}1712\ (29)\ °C + 0{,}00218\ (67)\ (t - 20\ °C) \qquad \text{... (H. 14)}$$

donde los números entre paréntesis son los valores numéricos de las incertidumbres estándar referidos a los correspondientes últimos dígitos de los resultados citados para la ordenada en el origen y la pendiente (véase 7.2.2). Esta ecuación proporciona el valor predicho de la corrección $b(t)$ a cualquier temperatura t, y en particular el valor $b(t_k)$ a $t=t_k$. Estos valores se dan en la cuarta columna de la tabla en tanto que la última columna da las diferencias entre los mensurandos y los valores predichos, $b_k - b(t_k)$. Un análisis de estas diferencias puede ser usado para verificar la validez del modelo lineal: existen pruebas formales (véase referencia [8]), pero no son considerados en este ejemplo.

H.3.4 Incertidumbre de un valor predicho.

La expresión para la incertidumbre estándar combinada del valor predicho de una corrección puede ser fácilmente obtenida aplicando la ley de propagación de incertidumbre, ecuación (16) en 5.2.2, a la ecuación (H.12). Notando que $b(t)=f(y_1, y_2)$ y escribiendo $u(y_1) = s(y_1)$ y $u(y_2) = s(y_2)$, se puede obtener

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t-t_o)^2 u^2(y_2) + 2(t-t_o)u(y_1)u(y_2)r(y_1,y_2) \quad \ldots(H.15)$$

La varianza estimada $u_c^2[b(t)]$ tiene un mínimo en $t_{min} = t_o - u(y_1)r(y_1, y_2) / u(y_2)$, que en el presente caso, es t_{min} = 24,0085 °C

Tabla H.6 – Datos usados para obtener una curva de calibración lineal para un termómetro mediante el método de mínimos cuadrados

Lectura número k	Lectura del Termómetro t_k (°C)	Corrección observada $b_k = t_{R.k} - t_k$ (°C)	Corrección predicha $b(t_k)$ (°C)	Diferencia entre la observación y la corrección predicha $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	–0,171	–0,1679	–0,0031
2	22,012	–0,169	–0,1668	–0,0022
3	22,512	–0,166	–0,1657	–0,0003
4	23,003	–0,159	–0,1646	+0,0056
5	23,507	–0,164	–0,1635	–0,0005
6	23,999	–0,165	–0,1625	–0,0025
7	24,513	–0,156	–0,1614	+0,0054
8	25,002	–0,157	–0,1603	+0,0033
9	25,503	–0,159	–0,1592	+0,0002
10	26,010	–0,161	–0,1581	–0,0029
11	26,511	–0,160	–0,1570	–0,0030

Como ejemplo del uso de la ecuación (H.15), considere que se requiere la corrección del termómetro y su incertidumbre para t=30 °C, la cual esta fuera del intervalo en el cual el termómetro fue realmente calibrado. Substituyendo t=30 °C en la ecuación (H.14) se tiene

$$b(30°C) = -0,1494°C$$

en tanto que la ecuación (H.15) se transforma en

$$u_c^2[b(30ºC)] = (0{,}0029ºC)^2 + (10ºC)^2\ (0{,}000\ 67)^2$$
$$+2(10ºC)\ (0{,}0029ºC)\ (0{,}00067)\ (-0{,}930)$$
$$=17{,}1\ x\ 10^{-6}ºC^2$$

or

$$u_c[b(30ºC)] = 0{,}0041ºC$$

Así, la corrección a 30°C es –0,1494°C, con una incertidumbre estándar combinada de u_c= 0,0041°C; u_c tiene $\nu = n - 2 = 9$ grados de libertad.

H.3.5 Eliminación de las correlaciones entre la pendiente y la ordenada en el origen

La ecuación (H.13e) para el coeficiente de correlación $r(y_1\ ,\ y_2)$, implica que si t_o es elegido de tal manera que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_o) = 0$, entonces $r(y_1\ ,\ y_2) = 0$, y y_1 y y_2 no estarán correlacionadas, simplificándose, por tanto, el cálculo de la incertidumbre estándar de la corrección predicha. Ya que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$ cuando $t_o = \bar{t} = (\sum_{k=1}^{n} t_k)/n$, y $\bar{t}$ = 24,0085°C en el caso presente, al repetir el ajuste por mínimos cuadrados con $t_o = \bar{t}$ = 24,0085°C se obtendrán los valores de y_1 y y_2 que no están correlacionados. (la temperatura $\bar{t}$ es también la temperatura a la cual $u^2[b(t)]$ es un mínimo –véase H.3.4) sin embargo, no es necesario repetir el ajuste ya que puede mostrarse que

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \qquad \ldots(H.16a)$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \qquad \ldots(H.16b)$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \qquad \ldots(H.16c)$$

donde

$$y_1' = y_1 + y_2\ (\bar{t} - t_o)$$

$$\bar{t} = t_o - s(y_1)\ r\ (y_1\ ,\ y_2)\ /\ s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)\ [1 - r^2(y_1\ ,\ y_2)]$$

y al escribir la ecuación (H.16b), se han realizado las substituciones $u(y_1') = s(y_1')$ y $u(y_2) = s(y_2)$ [véase la ecuación (H.15)]

La aplicación de estas relaciones a los resultados dados en H.3.3. proporciona

$$b(t) = -0,1625\ (11) + 0,002\,18\ (67)\ (t-24,0085ºC) \qquad \text{... (H. 17a)}$$

$$u_c^2[b(t)] = (0,0011)^2 + (t-24,0085ºC)^2\ (0,000\,67)^2 \qquad \text{...(H.17b)}$$

El hecho de que estas expresiones dan el mismo resultado que las ecuaciones (H. 14) y (H. 15) puede ser verificado repitiendo el cálculo de $b(30\ ºC)$ y $u_c[b(30\ ºC)]$. La substitución de t= 30 °C en las ecuaciones (H.17a) y (H.17b) da como resultado

$$b(30ºC) = -0,1494ºC$$

$$u_c[b(30ºC)] = 0,0041ºC$$

los cuales son idénticos a los resultados obtenidos en H.3.4. La covarianza estimada entre dos correcciones predichas $b(t_1,)$ y $b(t_2)$ puede ser obtenida de la ecuación (H.9) en H.2.3.

H.3.6 Otras consideraciones

El método de mínimos cuadrados puede ser usado para ajustar curvas de orden mayor a puntos dados y es también aplicable a casos donde los datos individuales tienen incertidumbres. Deben consultarse los textos clásicos que tratan el tema para obtener mayores detalles [8]. Sin embargo, los siguientes ejemplos ilustran dos casos en los cuales correcciones medidas b_k, no se suponen exactamente conocidas.

1) Supóngase que cada t_k, tenga incertidumbre despreciable, y que cada uno de los n valores $t_{R,k}$ se obtiene de una serie de m lecturas repetidas, y que la estimación ponderada de la varianza para tales lecturas basada en una gran magnitud de datos obtenidos durante varios meses sea s^2_p. Entonces la varianza estimada de cada una de los $t_{R.K}$ es $s^2_p/m = u^2_0$ y cada una de las correcciones observadas $b_k = t_{R.k} - t_k$ tienen la misma incertidumbre estándar u_0. Bajo estas circunstancias (y bajo la consideración de que no hay razón para creer que el modelo lineal es

incorrecto), u^2_0 reemplaza a s^2 en las ecuaciones (H.13c) y (H.13d).

NOTA

Una estimación ponderada de varianza s^2_p basada en N series de observaciones independientes de la misma variable aleatoria se obtiene a partir de

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

donde s^2 es la varianza experimental de la i-ésima serie de n_i observaciones repetidas independientes [ecuación (4) en 4.2.2] y tienen $\nu_i = n_i - 1$ grados de libertad. Los grados de libertad de s^2_p son $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. La varianza experiemental s^2_p/m (y la desviación estándar experimental $s_p/\sqrt{m}$) de la media aritmética de m observaciones independientes caracterizadas por la estimación ponderada de la varianza s^2_p tiene también ν grados de libertad .

2) Suponga que cada una de las t_k, tienen incertidumbre despreciable, que una corrección ε_k se aplica cada uno de los n valores $t_{R,K}$, y que cada corrección tiene la misma incertidumbre estándar u_a. Entonces la incertidumbre estándar de cada $b_k = t_{R,k} - t_k$ es también u_a, y $s^2(y_1)$ es reemplazada por $s^2(y_1) + u^2_a$ y $s^2(y_1')$ es reemplazada por $s^2(y_1') + u^2_a$.

H.4 Medición de Radioactividad

Este ejemplo es similar al ejemplo H.2, la medición simultánea de resistencia y reactancia, en el hecho de que los datos pueden ser analizados de dos diferentes maneras, cada una de las cuales proporciona esencialmente los mismos resultados numéricos. La primera aproximación ilustra una vez más la necesidad de tomar en cuenta las correlaciones observadas entre las magnitudes medidas.

H.4.1 El problema de medición

La concentración de actividad desconocida de radón (^{222}Rn) en una muestra de agua se determina contando el centelleo líquido contra una muestra patrón de radón en agua que tiene una concentración de actividad conocida. La concentración de actividad desconocida se obtiene midiendo tres fuentes de conteo que consisten de aproximadamente 5 gramos de agua y 12 gramos de centelleador en emulsión orgánica en frascos pequeños de 22ml:

Fuente (a) un *patrón* que consiste de una masa m_s, de la solución patrón con una concentración de actividad conocida;

Fuente (b) una *mezcla* de agua *testigo* que no contiene material radioactivo, usada para obtener el conteo de fondo;

Fuente (c) la *muestra* consiste de una parte alícuota (proporcional al total) de masa m_x, con concentración de radioactividad desconocida.

Se realizan seis ciclos de medición de las tres fuentes de conteo en el orden patrón – testigo – muestra; el intervalo de conteo corregido por tiempo muerto, T_o, para cada fuente durante los seis ciclos es 60 minutos. A pesar de que el conteo de fondo no puede ser asumido como constante durante el intervalo de conteo completo (65 horas), se supone que el número de cuentas obtenidas para cada testigo puede ser usado como representativo del conteo de fondo durante las mediciones del patrón y la muestra en el mismo ciclo. Los datos se dan en tabla H.7, donde

t_s, t_B, t_x son los lapsos desde el tiempo de referencia $t = 0$ hasta el punto medio de los intervalos de conteo corregidos por tiempo muerto T_0=60 min para el patrón, el testigo, y los frascos de muestra respectivamente; aunque t_B se da para completar la información, no es necesario para el análisis;

C_S C_B, C_X son los números de cuentas registradas en los intervalos de conteo corregidos por tiempo muerto T_0=60 nim para el patrón, el testigo y los frascos de muestra, respectivamente.

Las cuentas observadas pueden expresarse como

$$C_s = C_B + \varepsilon A_s T_0 m_s e^{-\lambda t_s} \qquad \ldots (H.\ 18a)$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_o m_x e^{-\lambda t x} \qquad \ldots (H.18b)$$

Donde

ε es la eficiencia de detección del líquido centellante para ^{222}Rn para una composición de fuente dada suponiéndola independiente del nivel de actividad;

A_s es la concentración de actividad del patrón en el tiempo de referencia $t=0$;

A_x es el *mensurando* y se define como la concentración de actividad desconocida de la muestra en el tiempo de referencia $t=0$;

m_s es la masa de la solución patrón;

m_x es la masa de la muestra alícuota;

λ es la constante de decaimiento para el ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1.258\,94 \times 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$ ($T_{1/2}$= 5505,8 min) .

Tabla H.7 – Datos de conteo para la determinación de la concentración de actividad de una muestra desconocida.

Ciclo	Patrón		Testigo		Muestra	
k	t_s (min)	C_s (cuentas)	t_B (min)	C_B (cuentas)	t_x (min)	C_x (cuentas)
1	243,74	15 380	305,56	4054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1046,10	3922	1107,66	38 706
3	1723,87	14 394	1785,43	4200	1846,99	35 860
4	2463,17	13 254	2524,73	3830	2586,28	32 238
5	3217,56	12 516	3279,12	3956	3340,68	29 640
6	3956,83	11 058	4018,38	3980	4079,94	26356

Las ecuaciones (H. 18a) y (H. 18b) indican que no pueden promediarse directamente ni los seis valores individuales de C_s ni los de C_x. dados en la tabla H.7 debido al decaimiento exponencial de la actividad del patrón y de la muestra, y a las ligeras variaciones en el conteo de fondo de un ciclo al otro. En lugar de eso, se debe tratar con e! decaimiento y el conteo de fondo corregidos (o razones de conteo definidos como el número de cuentas dividido por $T_O=60$ min). Esto sugiere combinar las ecuaciones (H.18a) y (H.18b) para obtener la siguiente expresión para la concentración desconocida en términos de las magnitudes conocidas:

$$A_x = f\,(A_s, m_s, m_x, C_s, C_x, C_B, t_s, t_x, \lambda)$$

$$= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{(C_x - C_B)e^{\lambda tx}}{(C_s - C_B)e^{\lambda ts}} \qquad \ldots(H.19)$$

$$= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_s - C_B)} e^{\lambda(tx-ts)}$$

donde $(C_x - C_B)\ e^{\lambda t_x}$ y $(C_s - C_B)\ e^{\lambda t_s}$ son, respectivamente, las cuentas de fondo corregidas de la muestra y del patrón al tiempo de referencia $t=0$ y al finalizar el lapso $T_0=60$ min. Altemativamente, puede escribirse simplemente

$$A_x = f(A_s, m_s, m_x, R_s, R_x) \qquad \ldots(H.20)$$

$$= A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{R_x}{R_s}$$

en donde las *razones* de *conteo* corregidas por fondo y por decaimiento R_x y R_s se dan por

$$R_x = [\,(C_x - C_B)/T_o\,]\ e^{\lambda t_x} \qquad \ldots(H.21a)$$

$$R_s = [\,(C_s - C_B)/T_o\,]\ e^{\lambda t_s} \qquad \ldots(H.21b)$$

H.4.2 Análisis de datos

La tabla H.8 resume los valores de las razones de conteo corregidas por fondo y por decaimiento, R_s y R_x, calculadas a partir de las ecuaciones (H.21a) y (H.21b) usando los datos de la tabla H.7 y $\lambda = 1{,}258\ 94 \times 10^{-4}\ \mathrm{min}^{-1}$ indicado anteriormente. Debe notarse que la razón $R = R_x/R_s$ se calcula más fácilmente a partir de la expresión

$$[(C_x - C_B)\ /\ (C_s - C_B)]\ \ e^{\lambda(t_x - t_s)}$$

Las medias aritméticas $\overline{R}_s$ $\overline{R}_x$ y $\overline{R}$, y sus desviaciones estándar experimentales $s(\overline{R}_s)$, $s(\overline{R}_x)$ y $s(\overline{R})$, se calculan de la manera usual [ecuaciones (3) y (5) en 4.2]. El coeficiente de correlación $r(R_x, R_s)$ se calcula a partir de la ecuación (17) en 5.2.3 y la ecuación (14) en 5.2.2.

Por la variabilidad comparativamente pequeña de los valores de R_x y R_s, la razón de las medias $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ y la incertidumbre estándar $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$ de esta razón son, respectivamente, muy aproximadamente las mismas que la razón media $\overline{R}$ y su desviación estándar experimental $s(\overline{R})$ como se da en la última columna de la tabla H.8 [véase H.2.4 y la ecuación (H.10) ahí incluida). Sin embargo, al calcular la incertidumbre estándar $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s)$, la correlación entre R_x y R_s, representada por el coeficiente de correlación $r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)$, debe tomarse en cuenta usando la ecuación (16) en 5.2.2. [Esta ecuación, da los últimos tres términos de la ecuación (H.22b) para el cálculo de la varianza estimada relativa de R_x/R_s].

Debe reconocerse que las desviaciones estándar experimentales respectivas de R_x y de R_s, $\sqrt{6}\ s(\overline{R}_x)$ y $\sqrt{6}\ s(\overline{R}_s)$ indican una variabilidad en esas magnitudes que es de dos a tres veces mayor que la variabilidad implicada por la estadística de Poisson de los procesos de conteo; la última está incluida en la variabilidad observada de las cuentas y no necesita ser considerada por separado.

H.4.3 Cálculo de resultados finales

Para obtener la concentración de actividad desconocida A_x. y su incertidumbre estándar combinada $u_c(A_x)$ a partir de la ecuación (H.20) se necesitan A_s, m_x y m_s y sus incertidumbres estándar. Estas están dadas como

$A_s = 0,1368\ Bq/g$

$u(A_s) = 0,0018\ Bq/g;\ u(A_s)/A_s = 1,32x\ 10^{-2}$

$m_s = 5,0192\ g$

$u(m_s) = 0,005\ g;\ u(m_s)/m_s = 0,10x10^{-2}$

$m_x = 5,0571\ g$

$u(m_x) = 0,0010\ g;\ u(m_x)/m_x = 0,02x10^{-2}$

Otras posibles fuentes de incertidumbre se evalúan y se desprecian por ser muy pequeñas:

– incertidumbre estándar de los tiempos de decaimiento, $u(t_{s,k})$ y $u(t_{x,k})$;

– incertidumbre estándar de la constante de decaimiento del ^{222}Rn, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7} min^{-1}$. (La magnitud significativa es el factor de decaimiento $\exp[\lambda(t_x - t_s)]$, el cual varía de 1,015 63 para los ciclos $k=4$ y 6 a 1,015 70 para el ciclo $k=1$. La incertidumbre estándar de esos valores es $u= 1,2x\ 10^{-5}$

– incertidumbre asociada con la posible dependencia de la eficiencia de detección del contador de centelleo con la fuente usada (patrón, testigo y muestra);

– incertidumbre en la corrección del tiempo muerto del contador y en la corrección de la dependencia de la eficiencia de conteo con el nivel de actividad.

Tabla H.8 – Cálculo de las razones de conteo corregidas por decaimiento y por fondo.

Ciclo k	Rx (min^{-1})	Rs (min^{-1})	$t_x - t_s$ (min)	$R = R_x/R_s$
1	652,46	194,65	123,63	3,3520
2	666,48	208,58	123,13	3,1953
3	665,80	211,08	123,12	3,1543
4	655,68	214,17	123,11	3,0615
5	651,87	213,92	123,12	3,0473
6	623,31	194,13	123,11	3,2107
	$\overline{R}_x = 652,60$ $s(\overline{R}_x) = 6,42$ $s(\overline{R}_x)/\overline{R}_x = 0,98 \times 10^{-2}$	$\overline{R}_x = 652,60$ $s(\overline{R}_s) = 3,79$ $s(\overline{R}_s)/\overline{R}_s = 1,84 \times 10^{-2}$		$\overline{R} = 3,170$ $s(\overline{R}) = 0,046$ $s(\overline{R})/(\overline{R}) = 1,44 \times 10^{-2}$
	$\overline{R}x/\overline{R}s = 3,167$ $u(\overline{R}x/\overline{R}s) = 0,045$ $u(\overline{R}x/\overline{R}s)/(\overline{R}x/\overline{R}s) = 1,42 \times 10^{-2}$			
Coeficientes de correlación				
$r(\overline{R}_x, \overline{R}_s) = 0,646$				

H.4.3.1 Resultados: Primera aproximación

Como se indicó interiormente, A_x y $u_c(A_x)$ pueden obtenerse, a partir de la ecuación (H.20), de dos maneras diferentes. En la primera aproximación, A_x se calcula usando las medias aritméticas $\overline{R}_x$ Y $\overline{R}_s$, lo cual da como resultado

$$A_x = A_s \frac{m_s}{m_x} \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_s} = 0,4300 Bq/g \qquad \ldots(H.22a)$$

Aplicando la ecuación (16) en 5.2.2 a esta expresión se obtiene la varianza combinada $u_c^2(A_x)$

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_s)}{A_s^2} + \frac{u^2(m_s)}{m_s^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2}$$
$$+ \frac{u^2(\overline{R}_x)}{\overline{R}_x^{\,2}} + \frac{u^2(\overline{R}_s)}{\overline{R}_s^{\,2}} \qquad \ldots(H22b)$$
$$- 2r(\overline{R}_x, \overline{R}_s)\frac{u(\overline{R}_x)u(\overline{R}_s)}{\overline{R}_x\overline{R}_s}$$

donde, como se anotó en H.4.2, los últimos tres términos dan $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_s)/(\overline{R}_x/\overline{R}_s)^2$ la varianza relativa estimada de $\overline{R}_x/\overline{R}_s$,. De acuerdo con la discusión de H.2.4, los resultados en la tabla 8 muestran que $\overline{R}$ no es exactamente igual a $\overline{R}_x/\overline{R}_s$ y, que la incertidumbre estándar $u(\overline{R}_x/\overline{R}_s,)$ de $R_x / \overline{R}_s$ no es exactamente igual a la incertidumbre estándar $s(\overline{R})$ de $\overline{R}$.

La substitución de los valores de las magnitudes relevantes en las ecuaciones (H.22a) y (H.22b) dan

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}93x10^{-2}$$
$$u_c(A_x) = 0{,}0083 Bq/g$$

El resultado de medición pueden ser expresada como:

A_x = 0,4300 Bq/g con una incertidumbre estándar combinada de u_c=0,0083 *Bq/g*.

H.4.3.2 Resultados: Segunda aproximación

En la segunda aproximación que evita la correlación entre $\overline{R}_x$ y $\overline{R}_s$, A_x se calcula usando la media aritmética $\overline{R}$ Así:

$$A_x = A_s \frac{m_s}{m_x} \overline{R} = 0{,}4304 \ B_q/g \qquad \ldots. \ (H.23a)$$

La expresión para u^2_c (A_x) es simplemente:

$$\frac{u_c^2(Ax)}{A_x^2} = \frac{u^2(As)}{A_s^2} + \frac{u^2(ms)}{m_s^2}$$

$$+ \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R})}{\overline{R}^2} \qquad \text{...(H23.b)}$$

lo cual conduce a:

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}95 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}0064\ B_q/g$$

El resultado de la medición puede expresarse como:

A_x = 0,4304 B_q/g con una incertidumbre estándar combinada u_c = 0,0084 B_q/g

Los grados efectivos de libertad de u_c pueden ser evaluados usando la fórmula de Welch–Satterthwaite de la forma ilustrada en H.1.6.

De la misma manera que en H .2, se prefiere el segundo de los dos resultados, debido a que se evita la aproximación de la media de la razón de dos magnitudes mediante la razón de las medias de esas dos magnitudes; esto refleja mejor el procedimiento de medición usado – los datos fueron de hecho recolectados en ciclos separados.

A pesar de esto, la diferencia entre los valores de A_x que resultan de las dos aproximaciones es claramente pequeña comparada con la incertidumbre estándar adscrita a cualquiera de ellas, y la diferencia entre las dos incertidumbres estándar es enteramente despreciable. Tal acuerdo demuestra que las dos aproximaciones son equivalentes cuando las correlaciones observadas son correctamente incluidas.

H.5 Análisis de la varianza

Este ejemplo da una breve introducción a los métodos de análisis de varianza (ANOVA, por sus siglas en inglés). Estas técnicas estadísticas son usadas para identificar y cuantificar *efectos aleatorios* individuales en una medición para que puedan ser apropiadamente tomadas en cuenta cuando se evalúa la incertidumbre del resultado de la medición. A pesar de que los métodos ANOVA son aplicables a una amplia gama de mediciones, por ejemplo, la calibración de patrones de referencia, como los patrones de tensión Zener y los patrones de masa, y la certificación de materiales de referencia, los métodos ANOVA no pueden identificar, por sí mismos, efectos sistemáticos que pudieran estar presentes.

Existen muchos modelos diferentes que se incluyen bajo el nombre general de ANOVA. Dada su importancia, el modelo específico discutido en este ejemplo es el diseño anidado balanceado. La ilustración numérica de este modelo involucra la calibración de un patrón de tensión Zener; el análisis debe ser relevante a una gran variedad de situaciones prácticas de medición.

Los métodos ANOVA son de especial importancia en la certificación, mediante pruebas interlaboratorios, de materiales de referencia (MR) , un tópico cubierto a fondo en la *Guía ISO 35* [19] (véase H.5.3.2 para una breve descripción de tal certificación de MR). Puesto que mucho del material contenido en la *Guía ISO 35* es en efecto aplicable en lo general, esta publicación puede ser consultada para obtener detalles adicionales concernientes a ANOVA, incluyendo diseños anidados desbalanceados. Las referencias [15] y [20] pueden ser igualmente consultadas.

H.5.1 El problema de medición

Considere un patrón de tensión Zener de 10 vo!ts nominales que es calibrado contra una referencia de tensión estable durante un período de dos semanas. En cada uno de J días durante el período, se realizan K observaciones repetidas independientes de la diferencia de potencial V_s del patrón. Si V_{jk} denota la observación k–ésima de V_s ($k = 1,2,...,K$) en el día j–ésimo ($j = 1,2,.... J$), la mejor estimación de la diferencia de potencial del patrón es la media aritmética $\overline{V}$ de las JK observaciones [véase la ecuación (3) en 4.2.1],

$$V_s = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V} \qquad \text{...(H.24a)}$$

La desviación estándar experimental de la media s($\overline{V}$), la cual es una medición de la incertidumbre de $\overline{V}$ como una estimación de la diferencia de potencial del patrón, se obtiene a partir de [véase la ecuación (5) en 4.2.3].

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (V_{jk} - \overline{V})^2 \qquad \ldots(\text{H.24b})$$

NOTA

A lo largo de este ejemplo se supone que todas las correcciones aplicadas a las observaciones para compensar por efectos sistemáticos tienen incertidumbres despreciables o que sus incertidumbres son tales que pueden tomarse en cuenta al final del análisis. Una corrección en esta última categoría, y una que puede ser aplicada a la media de las observaciones al final del análisis, es la diferencia entre el valor certificado (asumiendo que tiene una incertidumbre determinada) y el valor de trabajo de la referencia de tensión estable contra la cual se calibra el patrón de tensión Zener. Así, la estimación de la diferencia de potencial del patrón obtenida estadísticamente a partir de las observaciones no es necesariamente el resultado final de la medición; y la desviación estándar experimental de esta estimación no es necesariamente la incertidumbre estándar combinada del resultado final.

La desviación estándar experimental de la media s($\overline{V}$), obtenida a partir de la ecuación (H.24b), es una medida apropiada de la incertidumbre de $\overline{V}$ sólo si la variabilidad de las observaciones inter–días es la misma que la variabilidad de las observaciones hechas en un solo día. Si hay evidencia de que la variabilidad "inter–días" es significativamente mayor que la que podría ser esperada a partir de la variabilidad "intra–día", el uso de esta expresión puede proporcionar una subestimación de la incertidumbre de $\overline{V}$. Surgen entonces dos preguntas: ¿Cómo debería decidirse si la variabilidad "inter–día" (caracterizada por una componente de varianza "inter–día" es significativa en comparación con la variabilidad "intra–día" (caracterizada por una componente de varianza "intra–día")?, y si éste es el caso, ¿cómo podría evaluarse la incertidumbre de la media?

H.5.2 Un ejemplo numérico

H.5.2.1 En la tabla H.9 se listan los datos que permiten abordar las cuestiones antes mencionadas en dicha tabla

J = 10 es el número de días durante los cuales se realizan las observaciones de diferencia de potencial;

$K = 5$ es el número de observaciones de diferencia de potencial hechas en cada día;

$$\overline{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad \ldots(H.25a)$$

es la media aritmética de las K = 5 observaciones de diferencia de potencial hechas en el día j–ésimo (hay J = 10 de tales mediciones diarias);

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \qquad \ldots(H.25b)$$

es la media aritmética de $J = 10$ medias diarias y, por tanto, la media de las $JK = 50$ observaciones;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \qquad \ldots(H.25c)$$

es la varianza experimental de las $K = 5$ observaciones hechas en el j–ésimo día (hay $J = 10$ estimaciones semejantes de la varianza), y

$$s^2(\overline{V}_j = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \qquad \ldots(H.25d)$$

es la varianza experimental de las $J = 10$ medias diarias (existe por lo tanto sólo una estimación de la varianza).

H.5.2.2 La consistencia de la variabilidad intra–día y la variabilidad inter–días de las observaciones puede ser investigada comparando dos estimaciones independientes

de σ^2_w la componente de varianza intra–día (esto es, la varianza de las observaciones hechas en el mismo día).

Tabla H.9 – Resumen de !os datos de calibración de patrones de tensión, obtenidos en $J = 10$ días, con medias diarias $\overline{V}_j$ y desviaciones estándar experimentales $s(V_{jk})$ basadas en $K = 5$ observaciones repetidas independientes

Día *j* / Magnitud	1	2	3	4	5
$\overline{V}j$/Volts	10,000 172	10,000116	10,000 013	10,000144	10,000 106
$s(V_{jk})/\mu V$	60	77	111	101	67

Día *j* / Magnitud	6	7	8	9	10
$\overline{V}_j$/Volts	10,000 031	10,000 060	10,000125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})/\mu V$	93	80	73	88	86

$\overline{V}$ = 10,000 097 Volts $\quad s(\overline{V}_j) = 57\mu V$

$s^2_a = Ks^2(\overline{V}_j) = 5(57\mu V)^2 = (128\mu V)^2 \quad s^2_b = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\mu V)^2$

La primera estimación de σ^2_w, denotada por s^2_a, se obtiene a partir de la variación observada de las medias diarias $\overline{V}_j$. Puesto que $\overline{V}_j$ es el promedio de K observaciones, su varianza estimada $s^2(\overline{V}_j)$, bajo la suposición de que la componente de la varianza inter–días es cero, estima σ^2_w/K. Se sigue, entonces, de la ecuación, (H.25d) que

$$s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \qquad \text{…(H.26a)}$$

la cual es una estimación de σ^2_W, que tiene $\nu_a = J - 1 = 9$ grados de libertad.

La segunda estimación de σ^2_w, denotado por s^2_b, es la estimación ponderada de la varianza obtenida de $J = 10$ valores individuales $s^2(V_{jk})$ usando la ecuación de la nota H.3.6, donde los diez valores individuales se calculan a partir de la ecuación (H.25c). Debido a que los grados de libertad de cada uno de estos valores es $\nu_i = K - 1$, la expresión resultante para s^2_b, es simplemente su promedio. Entonces

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} s^2(V_{jk})$$

$$= \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \qquad \ldots(H.26b)$$

la cual es una estimación de σ^2_W que tiene $\nu_b, = J(K-1) = 40$ grados de libertad.

Las estimaciones de σ^2_W dados por las ecuaciones (H.26a) y (H.26b) son $s^2_a = (128\mu V)^2$ y $s^2_b = (85\mu V)^2$, respectivamente (véase la tabla H.9). Puesto que la estimación s^2_a está basado en la variabilidad de las medias diarias mientras que la estimación s^2_b, está basado en la variabilidad de las observaciones diarias, su diferencia indica la posible presencia de un efecto que varía de un día a otro pero que permanece relativamente constante cuando se hacen observaciones en un mismo día. La prueba *F* es usada para probar esta posibilidad, y, por tanto, la suposición de que la componente de la varianza inter–días es cero.

H.5.2.3 La distribución *F* es la distribución de probabilidad de la razón $F(\nu_a, \nu_b) = s^2_a(\nu_a)/s^2_b(\nu_b)$ de dos estimaciones independientes, $s_a^2(\nu_a)$ y $s_b^2(\nu_b)$ de la varianza σ^2 de una variable aleatoria distribuida normalmente [15]. Los parámetros ν_a y ν_b, son los grados de libertad respectivos de las dos estimaciones y $0 \leq F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Los valores de *F* están tabulados para diferentes valores de ν_a y ν_b y varios cuantiles de la distribución *F*. Un valor de $F(\nu_a, \nu_b) > F_{O,95}$ o $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (el valor crítico) se interpreta usualmente como una indicación de que $s^2_a(\nu_a)$ es mayor que $s^2_b,(\nu_b)$ por una magnitud estadísticamente significativa; y que la probabilidad de un valor

de F tan grande como el observado, si las dos estimaciones fueran obtenidas de la misma varianza, es menor que 0,05 o 0,025, respectivamente. (Pueden elegirse, también, otros valores críticos, por ejemplo $F_{O,99}$.)

H.5.2.4 La aplicación de la prueba F al ejemplo numérico presente da como resultado

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{s^2(V_{jk})}$$

$$= \frac{5(57\mu V)^2}{(85\mu V)^2} = 2{,}25 \qquad \ldots(H.27)$$

con $\nu_a = J - 1 = 9$ grados de libertad en el numerador y $\nu_b = J(K-1) = 40$ grados de libertad en el denominador.

Puesto que $F_{O,95}(9,40) = 2{,}12$ y $F_{O,975}(9,40) = 2{,}45$, se concluye que existe un efecto inter–días estadísticamente significativo al nivel del 5 por ciento de significación, pero que éste no está presente al nivel del 2,5 por ciento.

H.5.2.5 Si se decide que no existe un efecto inter–días debido a que la diferencia entre s^2_a y s^2_b , no es vista como estadísticamente significativa (una decisión imprudente debido a que podría resultar una subestimación de la incertidumbre), la varianza estimada $s^2(\overline{V})$ de $\overline{V}$ debe ser calculada a partir de la ecuación (H.24b). Esta relación es equivalente a ponderar las estimaciones s^2_a y s^2_b (esto es, tomando el promedio ponderado de s^2_a y s^2_b , cada uno ponderado mediante sus respectivos grados de libertad ν_a y, ν_b , – véase la nota de H.3.6), para obtener la mejor estimación de la varianza de las observaciones, y dividir esta estimación por JK, el número de observaciones, para obtener la mejor estimación $s^2(\overline{V})$ de la varianza de la media de los observaciones. Siguiendo este procedimiento se obtiene

$$s^2(\overline{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} \qquad \ldots(H.28a)$$

$$= \frac{9(128\mu V)^2 + 40(85\mu V)^2}{(10)(5)(49)}$$

$$= (13\ \mu V)\ ,\ ó\ s(\ \overline{V}) = 13\ \mu V \qquad \ldots(H.28b)$$

con s($\overline{V}$) que tiene $JK - 1 = 49$ grados de libertad.

Si se supone que todas las correcciones por efectos sistemáticos han sido tomadas en cuenta y que todas las otras componentes de incertidumbre son insignificantes, entonces el resultado de la calibración puede ser expresado como $V_s = \overline{V} =$ 10,000 0097 V (véase la tabla H.9), con una incertidumbre estándar combinada de s($\overline{V}$) = u_c, = 13 μV, en donde u_c tiene 49 grados de libertad.

NOTAS

1. En la práctica, muy probablemente podrían tenerse componentes adicionales de incertidumbre que fueran significativos, y, por tanto, tendrían que ser combinadas con las componentes de incertidumbre obtenidas estadísticamente a partir de las observaciones (véase la nota H.5. 1).

2. Puede demostrarse que la ecuación (H.28a) para $s^2(\ \overline{V})$ es equivalente a la ecuación (H.24b) escribiendo la doble suma, denotada por S en dicha ecuación como

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}[V_{jk} - \overline{V}_j) - (\overline{V}_j - \overline{V})]^2$$

$$= (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Si la existencia de un efecto inter–días es reconocida (una decisión prudente debido a que elimina la posibilidad de subestimar el valor de la incertidumbre) y se supone aleatoria, entonces la varianza $s^2(\ \overline{V}_j)$ calculada a partir de $J = 10$ medias diarias de acuerdo con la ecuación (H.25d) no estima σ^2_W/K como se postuló en H.5.2.2, sino a $\sigma^2_W/K + \sigma^2_b$, en donde σ^2_b es la componente aleatoria inter–días de la varianza. Esto implica que

$$s^2(\overline{V}_j) = s_W^2 / K + s_B^2 \qquad \text{(H.29)}$$

donde s^2_W estima σ^2_w y s^2_B estima σ^2_B. Puesto que $\overline{s^2(V_{jk})}$, que se calcula mediante la ecuación (H.26b), depende sólo de la variabilidad intra–día de las observaciones, se puede tomar $s^2_w = \overline{s^2(V_{jk})}$ Así, la razón $Ks^2(\overline{V}_j) / \overline{S^2(V_{jk})}$ usada para la prueba F en H.5.2.4 toma la forma

$$F = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_w^2 + Ks_B^2}{s_W^2}$$

$$= \frac{5(57\mu V)^2}{(85\mu V)^2} = 2{,}25 \qquad \text{...(H.30)}$$

Lo que da como resultado

$$s_B^2 = \frac{Ks^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K}$$

$$= (43\mu V)^2 \qquad \text{...(H.31a)}$$

$$s_B = 43\mu V$$

$$s_w^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\mu V)^2$$

$$s_w = 85\mu V \qquad \text{...(H.31b)}$$

La varianza estimada de $\overline{V}$ se obtiene de $s^2(\overline{V}_j)$, ecuación (H.25d), puesto que $s^2(\overline{V}_j)$ refleja propiamente ambas componentes aleatorias, inter–días e intra–día [véase la ecuación (H.29)]. Entonces

$$s^2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j)/J \qquad \text{...(H.32)}$$

$$= (57\mu V)^2/10$$
$$s\ \overline{(V)} = 18\mu V$$

en donde $s\ \overline{(V)}$ tiene $J-1 = 9$ grados de libertad.

Los grados de libertad de s^2_W (y, por tanto, s_w) son $J(K-1) = 40$ [véase la ecuación (H–26b)]. Los grados de libertad de s^2_B(y, por tanto, s_B) son los grados de libertad efectivos de la diferencia $s^2_B = s^2(V_j) - s^2((V_{jk})/K$ [ecuación (H.31a)], pero su estimación es problemática.

H.5.2.7 La mejor estimación de la diferencia de potencial del patrón de tensión es, entonces, $V_s = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ V con $s(\overline{V}) = u_c = 18\ \mu V$ como se indica en la ecuación (H.32). Este valor de u_c y sus 9 grados de libertad debe ser comparado con $u_c = 13\ \mu V$ y sus 49 grados de libertad, el resultado obtenido en H.5.2.5 [ecuación (H.28b)], cuando se rechaza la existencia de un efecto inter–días.

Durante una medición real un efecto aparente inter–días debería ser investigado adicionalmente, de ser posible, con la finalidad de determinar su causa y la posibilidad de que exista un efecto sistemático que pueda invalidar el uso de los métodos ANOVA. Como se señaló al inicio de este ejemplo, las técnicas ANOVA están diseñadas para identificar y evaluar componentes de incertidumbre que surjan a partir de efectos aleatorios; estos métodos no proporcionan información sobre las componentes que surgen por efectos sistemáticos.

H.5.3 El papel de ANOVA en las mediciones

H.5.3.1 Este ejemplo del patrón de tensión ilustra lo que se denomina, generalmente, un diseño anidado balanceado de una etapa. Es un diseño anidado de una etapa porque tiene un solo nivel de "anidamiento" de las observaciones con un factor, el día en que las observaciones son hechas, y el cual varía de una medición a otra. Se le llama balanceado porque se hacen el mismo número de observaciones cada día. El análisis presentado en el ejemplo puede ser usado para determinar si existe un

"efecto del operador", un "efecto del instrumento", un "efecto del laboratorio", un "efecto de muestreo", o aún un "efecto del método" en una medición particular. Entonces, en el ejemplo, podría imaginarse que se reemplazan las observaciones hechas en *J* diferentes días por observaciones hechas el mismo día pero por *J* operadores diferentes; la componente inter–días de la varianza se transforma, entonces, en una componente de varianza asociada con diferentes operadores.

H.5.3.2 Como se anotó en H.5, los métodos ANOVA son ampliamente usados en la certificación de materiales de referencia (MR) mediante pruebas interlaboratorios. Esta certificación generalmente involucra que se tiene un gran número de mediciones, realizadas en laboratorios independientes, igualmente competentes, de la propiedad para la cual el material va a ser certificado. Se supone generalmente que las diferencias en los resultados, tanto intra como interlaboratorios, son de naturaleza estadística, sin importar sus causas. La media de cada laboratorio es considerada una estimación no sesgada de la propiedad del material, y, usualmente, se considera a la media no ponderada de las medias del laboratorio como la mejor estimación de esta propiedad.

Una certificación de MR puede involucrar *I* diferentes laboratorios, cada uno de los cuales mide la propiedad requerida de *J* muestras diferentes del material, cada medición de una muestra consistente de *K* observaciones repetidas independientes. Entonces el número total de observaciones es *IJK* y el número total de muestras es *IJ*. Este es un ejemplo de un diseño anidado balanceado de 2 etapas análogo al ejemplo del patrón de tensión de una etapa considerado anteriormente. En este caso existen dos niveles diferentes de "anidamiento" de las observaciones con dos factores diferentes, muestra y laboratorio, que varían con la medición. El diseño es balanceado porque cada muestra es observada el mismo número de veces *(K)* en cada laboratorio y cada laboratorio mide el mismo número de muestras *(J)*. Una analogía adicional con el ejemplo del patrón de tensión: en el caso de MR el propósito del análisis de los datos es investigar la posible existencia de un efecto de una muestra a otra (inter–muestras) y un efecto de un laboratorio a otro (inter–laboratorios), y determinar la incertidumbre adecuada para ser asignada a la mejor

estimación del valor de la propiedad a ser certificada. Refiriéndose al párrafo anterior, se supone que la estimación es la media de las medias de los *I* laboratorios, la cual es también la media de las *IJK* observaciones.

H.5.3.3 La importancia de que varíen las magnitudes de entrada de las cuales depende el resultado de la medición de manera tal que la incertidumbre se obtenga a partir de datos observados evaluados estadísticamente, está señalada en 3.4.2. Los diseños anidados y el análisis de los datos resultantes mediante los métodos ANOVA pueden ser usados exitosamente en muchos tipos de medición prácticos.

Sin embargo, como se indica en 3.4.1, variar todas las magnitudes es raramente factible debido a las limitaciones en tiempo y recursos; en el mejor de los casos, en la mayoría de las situaciones prácticas de medición, sólo es posible evaluar algunos componentes de incertidumbre usando métodos ANOVA. Como se señaló en 4.3.1, muchas componentes deben evaluarse mediante criterios científicos usando toda la información disponible acerca de la posible variabilidad de las magnitudes de entrada en cuestión; en muchas situaciones, una componente de incertidumbre, tal como la que surge a partir de efectos inter muestras, inter laboratorios, inter instrumentos, o inter operadores, no pueden evaluarse mediante un análisis estadístico de series de observaciones sino que debe evaluarse a partir de toda la información disponible.

H.6 Mediciones sobre una escala de referencia: dureza

La dureza es un ejemplo de un concepto físico que no puede ser cuantificado sin hacer referencia. a un método de medición; no tiene unidad que sea independiente de tal método. La magnitud "dureza" se diferencia de las magnitudes clásicas medibles en que no puede ser introducida en ecuaciones algebraicas para definir otras magnitudes medibles (aunque algunas veces es usada en ecuaciones empíricas que relacionan, la dureza con alguna otra propiedad en algún determinado material). Su magnitud se determina mediante una medición convencional: la dimensión lineal de una muesca en un bloque del material de interés, o *bloque de muestra*. La medición se hace de acuerdo a una norma escrita, la cual incluye una descripción del elemento que hace las muescas, la construcción de la

máquina mediante la cual se obtiene la muesca, y la forma en la cual la máquina debe operarse. Hay más de una norma escrita, así que hay más de una escala de dureza.

La dureza reportada es una función (dependiendo de la escala) de la dimensión lineal que es medida. En el ejemplo dado en este subcapítulo es una función lineal de la media aritmética o promedio de la profundidad de cinco muescas repetidas, pero para algunas otras escalas la función es no lineal.

Las realizaciones de la máquina patrón son mantenidas como patrones nacionales (no hay una realización internacional del patrón); una comparación entre una máquina particular y la *máquina patrón nacional* se hace usando un *bloque de transferencia patrón*.

H.6.1 El problema de medición

En este ejemplo la dureza de un bloque de cierto material se determina sobre la escala "Rockwell C" usando una máquina que ha sido calibrada contra la máquina patrón nacional. La unidad de la escala de dureza Rockwell–C es 0,002 mm; la dureza sobre tal escala se define como 100 x (0,002 mm) menos el promedio de las profundidades, medidas en mm, de cinco muescas. El valor de esta magnitud dividida por la unidad de la escala Rockwell de 0,002 mm es llamado el "índice de dureza HRC". En este ejemplo la magnitud es llamada simplemente "dureza", representándose mediante el símbolo $h_{\text{Rockwell C}}$, y el valor numérico de dureza expresado en unidades Rockewell de longitud es llamado el "índice de dureza", simbolizándose $H_{\text{Rockwell C.}}$

H.6.2 Modelo matemático

Al promedio de las profundidades de las muescas hechas en el bloque de muestra mediante la máquina usada para determinar su dureza, o *máquina de calibración*¸ deben sumársele ciertas correcciones para determinar el promedio de la profundidad de las muescas que habrían sido hechas en el mismo bloque mediante la máquina patrón nacional.

De esta forma

$$h_{\text{Rockwell C}} = f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_s) \qquad \ldots(\text{H.33a})$$

$$= 100\ (0{,}002\text{mm}) - \bar{d}$$

$$- \Delta_c - \Delta_b - \Delta_s$$

$$H_{Rockwell\ c} = h_{Rockwell\ c} / (0{,}002mm) \ldots \text{(H.33b)}$$

En donde

$\overline{d}$ es el promedio de las profundidades de cinco muescas hechas mediante la máquina de calibración en el bloque de muestra;

Δ_c es la corrección obtenida a partir de una comparación de la máquina de calibración con la máquina patrón nacional usando un bloque de transferencia patrón, igual al promedio de las profundidades de *5m* muescas hechas por la máquina patrón nacional en este bloque, menos el promedio de las profundidades de *5n* muescas hechas en el mismo bloque mediante la máquina de calibración;

Δ_b es la diferencia en dureza (expresada como una diferencia de profundidad promedio de muesca) entre las dos partes del bloque patrón de transferencia usado respectivamente para hacer las muescas mediante las dos máquinas, que se supone igual a cero; y

Δ_s es el error debido a la falta de repetibilidad de la máquina patrón nacional y a la definición incompleta de la magnitud de dureza. A pesar de que Δ_s debe ser considerada igual a cero, tiene una incertidumbre estándar asociada igual a $u(\Delta_s)$

Ya que las derivadas parciales $\partial f/\partial \overline{d}$, $\partial f/\partial \Delta_c$, $\partial f/\partial \Delta b$ y $\partial f/\partial \Delta_s$ de la función de la ecuación (H.33a) son todas iguales a –1, la incertidumbre estándar combinada u^2_c (h) de la dureza del bloque de muestra medida mediante la máquina de calibración está dada, simplemente, por

$$u_c^2(h) = u^2(\overline{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_s) \quad \ldots \text{(H.34)}$$

donde por simplicidad de notación $h \equiv h_{Rockwell\ c}$.

H.6.3 Contribución de varianzas

H.6.3.1. Incertidumbre $u(\overline{d})$ de la profundidad promedio de las muescas, $\overline{d}$, del bloque de muestra

Incertidumbre de observaciones repetidas. La repetición estricta de una observación no es posible debido a que una nueva muesca no puede ser hecha en el mismo sitio en donde fue hecha una anterior. Ya que cada muesca debe ser hecha en un sitio diferente, cualquier variación en los resultados incluye el efecto de variaciones en dureza entre diferentes puntos de la muestra. Así, $u(\overline{d})$, la incertidumbre estándar del promedio de las profundidades de cinco muescas hechas en el bloque mediante la máquina de calibración, se considera igual a $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, en donde $s_p(d_k)$ es la desviación estándar experimental ponderada de las profundidades de las muescas determinada mediante mediciones "repetidas" sobre un bloque del que se sabe que tiene una dureza muy uniforme (véase 4.2.4).

Incertidumbre de indicación. A pesar de que la corrección de $\overline{d}$ debido a la lectura en la máquina de calibración es cero, hay una incertidumbre en $\overline{d}$ proveniente de la incertidumbre de la indicación de profundidad debido a la resolución δ de la propia indicación dada por $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (véase F.2.2.1). La varianza estimada de $\overline{d}$ es así

$$u^2(\overline{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \qquad \ldots(H.35)$$

H.6.3.2. Incertidumbre de la corrección para la diferencia entre las dos máquinas, $u(\Delta_c)$

Como se indicó en H.6.2, Δ_c es la corrección por la diferencia entre la máquina patrón nacional y la máquina de calibración. Esta corrección puede ser expresada como $\Delta_c = z_s' - z'$, donde $z_s' = (\sum_{i=1}^{m} \overline{Z}_{S,i})/m$ es la profundidad promedio de las $5m$ muescas hechas por la máquina patrón nacional en el bloque patrón de transferencia; y $z' = (\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}) / n$ es la profundidad promedio de las $5n$ muescas hechas en el mismo bloque por la máquina de calibración. Así, asumiendo que, para la comparación, la incertidumbre debido a la resolución de la indicación de cada máquina es despreciable, la varianza estimada de Δ_c es

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{n} \qquad \ldots(H.36)$$

donde:

$s_{av}^2(\bar{z}_s) = \left[\sum_{i=1}^{m} s^2(\bar{z}_{S.i})\right]/m$ es el promedio de las varianzas experimentales de las medias de cada una de las m series de muescas $z_{s.ik}$ hechas por la máquina patrón;

$s_{av}^2(z) = \left[\sum_{i=1}^{n} s^2(\bar{z}_i)/n\right]$es el promedio de las varianzas experimentales de las medias de cada una de las n series de muescas z_{ik} hechas por la máquina de calibración.

NOTA

Las varianzas s^2_{av} ($\bar{z}_s$) y s^2_{av} ($\bar{z}$) son estimaciones ponderadas de la varianza - véase la discusión de la ecuación (H.26b) en H.5.2.2.

H.6.3.3 Incertidumbre de la corrección debido a variaciones en la dureza del bloque patrón de transferencia, u(Δ_b)

La Recomendación Internacional R 12 de la OIML, Verification and calibration of Rockwell C hardness standardized blocks, (Verificación y calibración de bloques estandarizados de dureza Rockwell C) requiere que la máxima y la mínima profundidad de las cinco muescas obtenidas en el bloque patrón de transferencia no difieran por más de una fracción x de la profundidad promedio de esas mismas muescas, en donde x es una función del nivel de dureza. Sea, por lo tanto, xz' la diferencia máxima en las profundidades de muescas sobre el bloque entero, con z' definida como en H.6.3.2 con $n=5$. Supóngase, asimismo, que la diferencia máxima se describa mediante una distribución de probabilidad triangular alrededor del valor promedio $xz'/2$ (con la suposición razonable de que los valores cercanos al valor central son más probables que los valores cercanos a los extremos – véase 4.3.9). Entonces, si en la ecuación (9b) en 4.3.9 $a = xz'/2$, la varianza estimada de la corrección para la profundidad promedio de la muesca debido a diferencias en la

dureza presentada a la máquina estándar y la máquina de calibración respectivamente es

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \qquad \text{....(H.37)}$$

Como se indicó en H.6.2; se asume que la mejor estimación de la corrección Δ_b es cero.

H.6.3.4 Incertidumbre de la máquina patrón nacional y la definición de dureza, $u(\Delta_s)$

La incertidumbre de la máquina patrón nacional, junto con la incertidumbre debida a la definición incompleta del concepto de dureza se reporta como una desviación estándar estimada $u(\Delta_s)$ (una magnitud con dimensión de *longitud*).

H.6.4 La incertidumbre estándar combinada, $u_c(h)$

Los términos individuales listados de H.6.3.1 a H.6.3.4 al ser substituidos en la ecuación (H.34) dan como resultado, para las varianzas estimadas de la medición de dureza

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_s) \qquad \text{...(H.38)}$$

y la incertidumbre estándar combinada es $u_c(h)$.

Tabla H.10 – Resumen de datos para la determinación de la dureza de un bloque muestra en la escala Rockwell C

Fuente de Incertidumbre	Valor
Profundidad promedio $\overline{d}$ de 5 muescas hechas mediante la máquina de calibración en el bloque de muestra: 0,072 mm	36,0 unidades de la escala Rockwell
Indice de dureza del bloque muestra obtenido a partir de 5 muescas: $H_{rockwell\,C} = h_{Rockwell\,C}/(0{,}002\text{ mm}) =$ [100(0,002 mm) – 0,072 mm]/(0,002 mm) (véase H.6.1)	64,0 HRC
Desviación estándar experimental ponderada $s_p(d_k)$ de las profundidades de las muescas hechas, mediante la máquina de calibración, en un bloque que tiene una dureza uniforme	0,45 unidades de la escala Rockwell
Resolución δ de la indicación dial de la máquina de calibración	0,1 unidades de la escala Rockwell
$s_{av}(\overline{z_s})$, raíz cuadrada del promedio de las varianzas experimentales de las medias de m series de muescas hechas mediante la máquina patrón nacional en el bloque de transferencia patrón	0,10 unidades de la escala Rockwell, $m=6$
$s_{av}(\overline{z})$, raíz cuadrada del promedio de las varianzas experimentales de las medias de n series de muescas hechas mediante la máquina de calibración en el bloque patrón de transferencia	0,11 unidades de la escala Rockwell, $n=6$
Variación fraccional x permitida de la profundidad de la penetración en el bloque patrón de transferencia.	$1{,}5 \times 10^{-2}$
Incertidumbre estándar $u(\Delta_s)$ de la máquina patrón nacional y definición de dureza	0,5 unidades de la escala Rockwell

H.6.5. Ejemplo numérico

Los datos para este ejemplo se resumen en la tabla H.10.

La escala es la Rockwell C, designada como HRC. La unidad de la escala Rockwell es 0,002 mm, y, por tanto, en la tabla H.10 y en lo que sigue se entenderá que (por ejemplo) "36,0 unidades Rockwell" significan 36,0 x (0,002mm) = 0,072 mm y, que ésta es, simplemente, una manera conveniente de expresar los datos y resultados.

Si los valores para las magnitudes relevantes dadas en la tabla H. 10 son substituídas en la ecuación (H.38), se obtiene las siguientes expresiones:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} \right.$$

$$\left. + \frac{(0{,}015x36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2 \right] \textit{(unidad Rockwell)}^2$$

$$= 0{,}307 \text{ (unidad Rockwell)}^2$$

$$u_c(h) = 0{,}55 \text{ unidades Rockwell} = 0{,}0011 \text{ mm.}$$

donde, para propósitos de cálculo de incertidumbre, es adecuado tomar $z' = \bar{d} = 36{,}0$ unidades Rockwell.

Así, si se asume que $\Delta_c = 0$, la dureza del bloque muestra es

$h_{Rockwell\ C}$ = 64,0 unidades Rockwell ó 0,1280 mm con una incertidumbre estándar combinada $u_c = 0{,}55$ unidades Rockwell ó 0,0011 mm.

El índice de dureza del bloque es $h_{Rockwell\ c}$/(0,002 mm) = (0,1280mm)/(0,002 mm), ó

$H_{Rockwell\ C}$ = 64,0 HRC con una incertidumbre estándar combinada u_c = 0,55 HRC

Además de la componente de incertidumbre debido a la máquina patrón nacional y la definición de dureza, $u(\Delta_s) = 0{,}5$ unidades de Rockwell, las componentes significativas de la incertidumbre son aquellos que corresponden a la repetibilidad de la máquina, $s_p(d_k)/\sqrt{5} = 0{,}20$ unidades Rockwell; y la variación de la dureza del bloque patrón de transferencia , la cual es $(xz')^2/24 = 0{,}11$ unidades Rockwell. Los grados efectivos de libertad de u_c pueden evaluarse usando la fórmula de Welch–Satterthwaite de la manera ilustrada en H.1.6.

Anexo "J"

Glosario de los símbolos principales

a	Semi ancho de una distribución rectangular de valores posibles de una magnitud de entrada X_i: $a = (a_+ - a_-)/2$
a_+	Límite superior, de la magnitud de entrada X_i
a_-	Límite inferior, de la magnitud de entrada X_i
b_+	Límite superior, de la desviación de una magnitud de entrada X_i a partir de su estimación x_i:$b_+ = a_+ - x_i$
b_-	Límite inferior, de la desviación de una magnitud de entrada X_i a partir de su estimación x_i: $b_- = x_i - a_-$
c_i	Derivada parcial o coeficiente de sensitividad: $c_i = \partial f/\partial x_i$
f	Relación funcional entre el mensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las cuales depende Y, y entre la estimación de la magnitud de salida y y las estimaciones de entrada x_i de las cuales depende y.

$\partial f/\partial x_i$ Derivada parcial con respecto a la magnitud de entrada X_i de la relación funcional f entre el rnensurando Y y las magnitudes de entrada X_i de las cuales depende Y, evaluada con las estimaciones x_i de X_i : $\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i \,|\, x_1, x_2, \ldots x_N$

k Factor de cobertura utilizado para calcular la incertidumbre expandida $U = ku_c(y)$ de la estimación de la magnitud de salida y a partir de su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$, en donde U define un intervalo $Y = y \pm U$ que tiene un alto nivel de confianza

k_p Factor de cobertura utilizado para calcular la incertidumbre expandida $U_p = k_p u_c(y)$ de la estimación de salida y a partir de su incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ en donde U_p define un intervalo $Y = y \pm U_p$ que tiene un alto nivel de confianza p especificado

n Número de observaciones repetidas

N Número de magnitudes de entrada X_i de las cuales depende el mensurando Y

p Probabilidad; nivel de confianza: $0 \leq p \leq 1$

q Magnitud que varía aleatoriamente descrita mediante una distribución de probabilidad

$\bar{q}$ Media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes q_k de una magnitud que varía aleatoriamente q; estimación de la esperanza o media μ_q de la distribución de probabilidad de q

q_k k-ésima observación independiente repetida de la magnitud que varía aleatoriamente q

$r(x_i,x_j)$ Estimación del coeficiente de correlación asociada con las estimaciones de entrada x_i y x_j, que estiman a las magnitudes de entrada X_i y X_j, respectivamente $r(x_i,x_j) = u(x_i, x_j)/u(x_i)u(x_j)$

$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ Estimación del coeficiente de correlación de las medias de entrada $\bar{X}_i$ y $\bar{X}_j$ determinados a partir de n pares independientes de observaciones repetidas simultáneas $X_{i,k}$ y X_{jk} de X_i y X_j: $r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)$

$r(y_i, y_j)$ Estimación del coeficiente de correlación asociada con las estimaciones y_i y y_j cuando dos o más de los mensurandos o magnitudes de salida son determinados en la misma medición

s^2_p Estimación de la varianza combinada o ponderada

s_p Desviación estándar experimental ponderada, igual a la raíz cuadrada positiva de s^2_p

$s^2(\bar{q})$ Varianza experimental de la media $\bar{q}$; estimación de la varianza σ^2/n de $\bar{q}$: $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$; varianza estimada obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$s(\bar{q})$ Desviación estándar experimental de la media $\bar{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\bar{q})$;$s(\bar{q})$ es una estimación sesgada de $\sigma(\bar{q})$ (véase la nota de C.2.21); incertidumbre estándar obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$s^2(q_k)$ Varianza experimental determinada a partir de n observaciones repetidas independientes q_k de q; estimación de la varianza σ^2 de la distribución de probabilidad de q

$s(q_k)$ Desviación estándar experimental igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(q_k)$; $s(q_k)$ es una estimación sesgada de la desviación estándar σ de la distribución de probabilidad de q

$s^2(\bar{X}_i)$ Varianza experimental de la media de las magnitudes de entrada $\bar{X}_i$, determinada a partir de n observaciones repetidas independientes $X_{i,k}$ de X_i; estimación de la varianza obtenida a partir de una evaluación de Tipo A

$s(\bar{X}_i)$ Desviación estándar experimental de la media de las magnitudes de entrada $\bar{X}_i$, igual a la raíz cuadrada positiva de $s^2(\bar{X}_i)$; incertidumbre estándar obtenida a partir de una evaluación de Tipo A -

$s(\bar{q}, \bar{r})$ Estimación de la covarianza de las medias $\bar{q}$ y $\bar{r}$ que estiman las esperanzas μ_q y μ_r de dos variables aleatorias q y r, determinadas a partir de n pares independientes de observaciones repetidas simultáneas q_k y r_k de q y r; covarianza estimada obtenida a partir de una evaluación de Tipo A

$s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ Estimación de la covarianza del promedio de las entradas $\bar{X}_i$ y $\bar{X}_j$, determinadas a partir de *n* pares independientes de observaciones repetidas simultáneas $X_{i,k}$ Y $X_{j,k}$ de X_i y X_j ; covarianza estimada obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$t_p(\nu)$ Factor *t* de la distribución *t* para ν grados de libertad correspondientes a una probabilidad *p* dada

$t_p(\nu_{eff})$ Factor *t* de la distribución *t* para ν_{eff} grados de libertad correspondientes a una probabilidad *p* dada, usado para calcular la incertidumbre expandida U_p

$u^2(x_i)$ Varianza estimada asociada con la estimación de entrada x_i que estima la magnitud de entrada X_i

NOTA

Cuando x_i se determina a partir de la media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ es una estimación de la varianza obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$u(x_i)$ Incertidumbre estándar de la estimación de entrada x_i que estima a la magnitud de entrada X_i, igual a la raíz cuadrada positiva de $u^2(x_i)$

NOTA

Cuando x_i se determina a partir de la media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes, $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ es una incertidumbre estándar obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$u(x_i, x_j)$ Covarianza estimada asociada con dos estimaciones de entrada x_i y x_j de las magnitudes de entrada X_i y X_j.

NOTA

Cuando x_i y x_j se determinan a partir de n pares independientes de observaciones simultáneas repetidas, $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ es una covarianza obtenida a partir de una evaluación de Tipo A.

$u_c^2(y)$ Varianza combinada asociada con la estimación de salida *y*.

$u_c(y)$ Incertidumbre estándar combinada de la estimación de salida *y* , igual a la raíz cuadrada positiva de $u_c^2(y)$.

$u_{cA}(y)$ Incertidumbre estándar combinada de la estimación de salida y determinada a partir de incertidumbres estándar y covarianzas estimadas obtenidas a partir de evaluaciones de Tipo A únicamente.

$u_{cB}(y)$ Incertidumbre estándar combinada de la estimación de salida y determinada a partir de incertidumbres estándar y covarianzas estimadas obtenidas a partir de evaluaciones de Tipo B únicamente.

$u_c(y_i)$ Incertidumbre estándar combinada de la estimación de salida y_i cuando dos o más mensurandos o magnitudes de salida son determinadas en la misma medición

$u_i^2(y)$ Componente de la varianza combinada $u_c^2(y)$ asociada con una estimación de salida y generada mediante la estimación de la varianza $u^2(x_i)$ asociada con la estimación de entrada x_i : $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$

$u_i(y)$ Componente de la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ de la estimación de salida y generada mediante la incertidumbre estándar de la estimación de entrada x_i: $u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i)$

$u(y_i,y_j)$ Covarianza estimada asociada con las estimaciones de salida y_i y y_j determinadas en la misma medición

$u(x_i)/|x_i|$ Incertidumbre estándar relativa de la estimación de entrada x_i

$u_c(y)/|y|$ Incertidumbre estándar combinada relativa de la estimación de salida y

$[u(x_i)/x_i]^2$ Varianza relativa estimada asociada con la estimación de entrada x_i

$[u_c(y)/y]^2$ Varianza combinada relativa asociada con la estimación de salida y

$u(x_i,x_j)/|x_i,x_j|$ Covarianza relativa estimada asociada con las estimaciones de entrada x_i y x_j

U Incertidumbre expandida de la estimación de salida que define un intervalo $Y = y \pm U$ que tiene un suficientemente alto nivel de confianza; es igual al factor de cobertura k multiplicado por la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ de y: $U = ku_c(y)$.

U_p Incertidumbre expandida de la estimación de salida que define un intervalo $Y = y \pm U_p$ que tiene un alto nivel de confianza p especificado ; es igual al factor de cobertura k_p multiplicado por la incertidumbre estándar combinada $u_c(y)$ de y: $U_p = k_p u_c(y)$

x_i Estimación de la magnitud de entrada X_i

NOTA

Cuando x_i se determina a partir de la media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes, $x_i = \overline{X}_i$

X_i i-ésima magnitud de entrada de la cual depende el mensurando Y

NOTA

X_i puede ser la magnitud física o la variable aleatoria (véase la nota 1 de 4.1.1)

$\overline{X}_i$ Estimación del valor de la magnitud de entrada X_i, igual a la media aritmética o promedio de n observaciones repetidas independientes $X_{i,k}$ de X_i

$X_{i,k}$ k-ésima observación repetida independiente de X_i

y Estimación del mensurando Y; resultado de una medición; estimación de salida

y_i Estimación del mensurando Y cuando dos o más mensurandos se determinan en la misma medición

Y Un mensurando

$\Delta u(x_i)/u(x_j)$ Incertidumbre relativa estimada de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la estimación de entrada x_i

μ_q Esperanza o media de la distribución de probabilidad de la magnitud que varía aleatoriamente q

ν Grados de libertad (en general)

ν_i Grados de libertad, o grados efectivos de libertad, de la incertidumbre estándar $u(x_i)$ de la estimación de entrada x_i

ν_{eff} Grados efectivos de libertad de $u_c(y)$ usados para obtener $t_p(\nu_{eff})$ para calcular la incertidumbre expandida U_p

ν_{effA} Grados efectivos de libertad de una incertidumbre estándar combinada determinada a partir de incertidumbres estándar obtenidas de evaluaciones de Tipo A únicamente

ν_{effB} Grados efectivos de libertad de una incertidumbre estándar combinada determinada a partir de incertidumbres estándar obtenidas de evaluaciones de Tipo B únicamente

σ^2 Varianza de una distribución de probabilidad de (por ejemplo) una magnitud que varía aleatoriamente q, estimada mediante $s^2(q_k)$

σ Desviación estándar de una distribución de probabilidad, igual a la raíz cuadrada positiva de σ^2; $s(q_k)$ es una estimación sesgada de σ

$\sigma^2(\bar{q})$ Varianza de $\bar{q}$, igual a σ^2/n, se estima mediante $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$

$\sigma(\bar{q})$ Desviación estándar de $\bar{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $\sigma^2(\bar{q})$; $s(\bar{q})$ es una estimación sesgada de $\sigma(\bar{q})$

$\sigma^2[s(\bar{q})]$ Varianza de la desviación estándar experimental $s(\bar{q})$ de $\bar{q}$

$\sigma[s(\bar{q})]$ Desviación estándar de la desviación estándar experimental $s(\bar{q})$ de $\bar{q}$, igual a la raíz cuadrada positiva de $\sigma^2[s(\bar{q})]$

Anexo "K"

Bibliografía

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1-C30 (en francés): BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. Int. Poids et Mesures (Sèvres, France) (en inglés)

[2] Kaarls, R. (1981), *BIPM Proc. -Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12 (en francés); Giacomo, P. (1981), *Metrología* **17**, 73-74 (en inglés)

NOTA

La traducción al inglés de la Recomendación INC-1 (1980), cuya traducción al español es presentada en la Introducción a esta Guía (véase 0.7), se hizo a partir de la versión final de la Recomendación y fue tomada de un reporte interno del BIPM. Es consistente con el texto autorizado en francés de la Recomendación dada en BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures ***49****, reproducido en A.1. en el Anexo A de esta Guía. La versión en inglés de la Recomendación INC-1 (1980) dada en Metrología* ***17*** *se hizo a partir de un borrador y difiere ligeramente de la traducción dada en el reporte interno del BIPM y por tanto de 0.7.*

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poid set Mesures* **49**,8-9, 26 (en francés); Giacomo, P.(1982), M*etrología* **18**, 43-44 (en inglés).

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35 (en francés); Giacomo, P. (1987), Metrología **24**, 49-50 (en inglés).

[5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods- Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests, International Organization for Standarization* (Ginebra, Suiza).

NOTA

Esta norma esta siendo revisada actualmente. La revisión tiene un nuevo título: "Exactitud (veracidad y precisión) de métodos y resultados de medición". Está compuesta de seis partes.

[6] Vocabulario Internacional de Términos Fundamentales y Generales de Metrología. Indecopi-Servicio Nacional de Metrología (1998). Tomado con autorización de ISO del *International vocabulary of basic and general terms in metrology*, segunda edición, 1993, International Organization for Standarization (Ginebra, Suiza).

La abreviatura del título de este vocabulario es VIM

NOTAS

1. *La segunda edición del VIM en inglés fue revisada por la Intemational Organization for Standarization (ISO) a nombre de las siguientes siete organizaciones que participan en el trabajo del Grupo Asesor Técnico de Trabajo 4 (TAG 4) de la ISO; este grupo apoyó el desarrollo del VIM: el Bureau Intemational des Poids et Mesures (BIPM), la International Electrotechnical Commission (IEC), la International Federation of Clinical Chemistry (IFCC), ISO, la Intemational Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), la Intemational Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), y la International Organization of Legal Metrology, (OIML)*

2. *La primera edición del VIM fue publicado* por la ISO en 1984 a nombre de BIPM, IEC, ISO, y OIML

[7] ISO 3534-1:1993, *Statistics - Vocabulary and symbols - Part 1: Probability and general statistical terms*, *Intemational Organization for Standarization* (Ginebra, Suiza).

[8] Fuller, W. A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N.Y.).

[9] Allan, D. W. (1987), IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-36**, 646-654.

[10] Dietrich, C.F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, segunda edición, Adam-Hilger (Bristol)

[11] Müller, J.W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth*, **163,** 241-251

[12] Müller, J.W. (1984), in *Precision measurement and fundamental constants,* II Taylor, B.N., y Phillips, W. D. eds., Natl. Bur. Stand (U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington D.C.), 375-381

[13] Jefreys, H. (1983), *Theory of probability,* tercera edición, Oxford University Press (Oxford).

[14] Press. S.J. (1989), *Bayesian Statistics: principles, models, and applications,* John Wiley (New York, N.Y.)

[15] Box. G.E. P., Hunter, W. G., and Hunter, J. S. (1978), *Statistics for experimenters,* John Wiley (New York, N.Y.)

[16] Welch, B.L. (1936), *J.R. Stat. Soc. Suppl.* 3, 29-48: (1938), *Biometrika* **29,** 350-362; (1947), *ibid.* **34,** 28-35.

[17] Fairfield-Smith, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res.* (Australia) **9**(3), 211.

[18] Satterthwaite, F.E. (1941) *Psychometrika* **6**, 309-316: (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114

[19] ISO GUIDE 35: 1989 *Certification of reference materials - General and statistical principles,* segunda edición, International Organization for Standarization (Ginebra, Suiza).

[20] Barker, T.B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N.Y.)

Indice Alfabético

A

aleatoria, variable ..... nota 1 de 4.1.1., 4.2.1, nota de 4.2.3, C.2.2, C.3.1, C.3.2, C.3.4, C.3.7, C.3.8, E.3.4, F.1.2.1, G.3.2

aleatorias, variaciones, correlacionadas ..... *véase* correlaciones variaciones aleatorias

aleatoriedad ..... F.1.1, F.1.1.3 , F.1.1.5

aleatorio ..... 3.3., E.1.3, E.3.5 - E.3.7

aleatorio, efecto 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 4.2.2, E.1.1, E.3

aleatorio, error ..... 3.2.1 - 3.2.3, B.2.21

análisis de la varianza ..... véase ANOVA

ANOVA ..... 4.2.8, H.5 *et seqq.*

aritmética, media ..... *véase* media aritmética

B

bilateral, intervalo de confianza C.2.27

BIPM ..... i,ii,v, 0.5, 7.1.1, A.1, A.2

C

calibración, cadena de ..... nota de 4.2.8

calibración por comparación.....nota de F.1.2.3
calibración, curva de.....F.2.4.2, F.2.4.5
calibración, curva de, lineal ..... H.3 *et seqq*
característica.....C.2.15
CIPM i,v,0.5,6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
cobertura, factor de .....2.3.6, 3.3.7, nota de 4.3.4, 6.2.1, 6.3 *et seqq.*, G.1.3, G.2.3, G.3.4, G.6.1 *et seqq.*
cobertura, probabilidad de .....0.4, nota 1 de 2.3.5, 3.3.7, 6.2.2, G.1.1, G.1.3, G.3.2.
Comité Internacional de Pesas y Medidas ..... *véase* CIPM
confianza, coeficiente de.....C.2.29
confianza, intervalo de.....nota 1 de 4.2.3, 6.2.2, C.2.27, C.2.28, E.3.3
confianza, intervalos de, ……..... E.3.3
confianza, nivel de 6.2., C.2.29
convolución ..... *véase* distribuciones de probabilidad
corrección .....3.2, 3.2.3, nota 2 de 3.2.4, B.2.23
corrección, factor de 3.2.3, B.2.24
corrección, ignorar una..... nota 2 de 3.2.4, 3.4.4, nota de 6.3.1, F.2.4.5
corrección, incertidumbre de una..... *véase* incertidumbre de una corrección
correlación .....5.1, 5.2 *et seqq.*, C.2.8, F.1.2, F.1.2.1 - F.1.2.4
correlación, coeficiente de 5.2.2, 5.2.3, C.3.6, F.1.2.3, H.2.3, H.2.4, H.3.2, H.4.2
correlación, coeficiente de, dígitos significativos para un 7.2.6
correlación, eliminación de la.....5.2.4, 5.2.5 F.1.2.4, H.3.5
correlación de estimaciones de magnitudes de entrada ..... *véase* correlación
correlación de estimaciones de mensurandos .....3.1.7, 7.2.5, H.2.3, H.2.4, H .3.2, H.4.2
correlación, matriz de coeficientes de ..... 7.2.5, nota 2 de C.3.6
correlacionadas, variaciones aleatorias 4.2.7
corregido, resultado ..... *véase* resultado corregido
covarianza .....3.3.6, 5.2.2, C.3.4, F.1.2.1 - F.1.2.4
covarianza de mensurandos relacionados ..... *véase* mensurandos o magnitudes correlacionadas
covarianza, evaluación experimental de la ..... 5.2.5, nota 3 de C.3.6
covarianza, matriz ..... 3.1.7, nota 2 de 5.2.2, 7.2.5, C.3.5, H.2.3
credibilidad, grado de..... 3.3.5, E.3.5, E.4.4, nota de E.5.2
Comisión Electotécnica Internacional.....*véase* IEC

convencional, valor verdadero, de una magnitud.....*véase* valor convencionalmente verdadero de una magnitud

curva de calibración.....véase calibración, curva de

D

derivadas parciales.....5.1.3

descuido.....3.4.7

desviación estándar.....3.3.5, C.2.12, C.2.21, C.3.3

desviación estándar experimental..... 4.2.2, B.2.17

desviación estándar experimental de la media.....4.2.3, nota 2 de B.2.17

desviación estándar experimental de la media, incertidumbre de la ..... *véase* incertidumbre de la desviación

desviación estándar experimental ponderada..... *véase* varianza, estimación ponderada de la

desviaciones estándar como medida de la incertidumbre..... *véase* incertidumbre, desviaciones estándar

desviaciones estándar, propagación de las..... E.3, E.3.1, E.3.2

desviaciones estándar, propagación de múltiplos de las..... E.3.3

diseño anidado balanceado.....H.5.3.1, H.5.3.2

distribución a *priori*..... 4.1.6. nota de 4.3.1, 4.4.4. *et seqq*, I) 6.1, E.3.4, E.3.5, G.4.2. G.4.3

distribución asimétrica.....4.3.8, F.2.4.4, G.5.3

distribución de frecuencia.....*véase* frecuencia, distribución de

distribución de Laplace-Gauss ..... *véase* Laplace-Gauss, distribución de

distribución de probabilidad .....*véase* probabilidad, distribución de

distribución de probabilidad, convolución de..... *véase* probabilidad, convolución de distribuciones de

distribución de Student.....*véase* Student, distribución de

distribución F..... *véase* F, distribución

distribución, función de C.2.4

distribución normal.....*véase* normal, distribución

distribución t.....*véase* t, distribución

distribución trapezoidal.....4.3.9

distribución triangular 4.3.9, 4.4.6, F.2.3.3

distribuciones matemáticamente determinadas.....F.2.2

E

efecto aleatorio ..... *véase* aleatorio, efecto
efecto sistemático..... *véase* sistemático, efecto
entropía máxima, principio de ..... nota 2 de 4.3.8
error aleatorio ..... *véase* aleatorio, error
error, análisis de 0.2
error, curva de, de un instrumento verificado F.2.4.2
error, determinación de 3.4.5
error de una medición..... 0.2, 2.2.4, 3.2., nota de 3.2.1, nota 2 de 3.2.2, nota de 3.2.3, nota de 3.3.1, 3.3.2, B.2.19, D, D.4.. D.6.1, D.6.2, E.5.1 *et seqq*
error e incertidumbre, confusión entre ..... NOTA 2 DE 3.2.2, NOTA DE 3.2.3, e.5.4
error, ley general de la propagación del .....nota 1.de 5.2.2, E.3.2
error, máximo límiite… E.4.1
error máximo permisible F.2.4.2
error relativo ..... *véase* relativo, error
error sistemático..... *véase* sistemático,
esperanza matemática (o valor esperado) ... 3.2.2, 3.2.3, nota 3 de 4.1.1, 4.2.1, 4.37 - 4.3.9, C.2.9, C.3.1, C.3.2
estadística 4.2.7, C.2.23
estadístico, control.....3.4.2, 4.2.4
estadístico, intervalo de cobertura C.2.30
estimación.....3.1.2, C.2.24, C.2.26
estimación de una magnitud de entrada ..... *véase* magnitud de entrada, estimación de un
estimación de un mensurando ..... *véase* mensurando, estimación de un
estimador 4.2.7, C.2.25
exactitud de la medición.....3.1.3, 3.4.1, B.2.14
expandida, incertidumbre .....2.3.5, 3.3.7, 6, 6.2.1 - 6.2.3, G.1.1, G.2.3, G.3.2, G.4.1, G.5.1 - G.5.4, G.6.4 - G.6.6
expandida, incertidumbre, para una distribución asimétrica G.5.3
expandida, incertidumbre, relativa 7.2.3
expandida, incertidumbre, informe de 7.2.3, 7.2.4
experimental, desviación estándar..... *véase* desviación estándar experimental

F

F, distribución H.5.2.3
F, prueba H.5.2.2, H.5.2.4
Federación Internacional de Química Clínica ..... *véase* IFCC
frecuencia C.2.17
frecuencia, distribución de 3.3.5, 4.1.6, C.2.18, E.3.5
frecuencia relativa E.3.5
funcional, relación 4.1.1, 4.1.2
funcional, relación, linealización de una ..... 5.1.5, nota de F.2.4.4, nota 1 de 5.1.6
funcional, relación, no lineal ..... nota de 4.1.4, nota de 5.1.2, nota de F.2.4.4, G.1.5, H.1.7, H.2.4

G

Grupo de Trabajo para la Expresión de Incertidumbres ..... i,v, 0.5, 3.3.3, 6.1.1, 6.1.2, A.1, A.2, A.3
Grupo de Trabajo 3 (ISO/TAG4/WG 3) v

H

histograma ..... 4.4.3, nota 1 de D.6.1

I

IEC ..... i, ii, v, A.3, B.1
IFCC ..... i, ii, v, B.1
importado, magnitud de entrada F.2.3, F.2.3.1
incertidumbre, agrupando las componentes de la ..... nota de 3.3.3, 3.4.3, E.3.7
incertidumbre, calidad y utilidad de la, especificada 3.4.8
incertidumbre, categorización o clasificación de las componentes de la 3.3.3, 3.3.4, E.3.6, E.3.7

incertidumbre, comparación de dos enfoques de la ..... E.5 *et seqq*
incertidumbre, conteo doble de la componentes de la 4.3.10
incertidumbre cuando no se aplica una corrección .....3.44, nota de 6.3.1, F.2.4.5
incertidumbre debida a la aritmética de precisión finita.....F.2.2.3
incertidumbre debida a la definición incompleta del mensurando ..... nota de 3.1.3, D.1.1, D.3.4, D.6.2
incertidumbre debida a la histéresis.....F.2.2.2
incertidumbre debida a la resolución de una indicación digital.....F.2.2.1
incertidumbre debida a muestreo limitado .....nota de 4.3.2, E.4.3
incertidumbre, definición del concepto de ..... *véase* incertidumbre de la medición
incertidumbre de la desviación estándar experimental de la media .....nota de 4.3.2, E.4.3
incertidumbre de medición ..... 0.1, 0.2, 1.1, 2.2, 2.2.1 - 2.2.4, 3.3, 3.3.1, 3.3.2, B.2.18, D, D.5, D.5.1 - D.5.3, D.6.1, D.6.2
incertidumbre de la muestra ..... F.2.6 *et seqq.*
incertidumbre del método de la medición F.2.5, F.2.5.1
incertidumbre, desviaciones estándar como una medida de la .....E.3.2, E.4, E.4.1 - E.4.4
incertidumbre de una corrección.....nota de 3.2.3, 3.3.1, 3.3.3, D.6.1, E.1.1, E.3
incertidumbre de una única observación de un instrumento calibrado.....F.2.4.1
incertidumbre de una única observación de un instrumento verificado.....F.2.4.2
incertidumbre de una magnitud controlada F.2.4.3
incertidumbre estándar..... 2.3.1, 3.3.5, 3.3.6, 4.1.5, 4.1.6, 4.2.3, D.6.1, E.4.1
incertidumbre estándar combinada ..... 2.3.4, 3.3.6, 4.1.5, 5, 5.1.1 - 5.1.3, 5.1.6, 5.2.2, 6.1.1, D.6.1, E.3.6
incertidumbre estándar combinada a partir de componentes de Tipo A únicamente.....7.2.1, nota 3 de G.4.1
incertidumbre estándar combinada a partir de componentes de Tipo B únicamente .....7.2.1, nota 3 de G.4.1
incertidumbre estándar combinada, cálculo numérico de .....nota 2 de 5.1.3, nota 3 de 5.2.2
incertidumbre estándar combinada, informe de 7.2.1, 7.2.2
incertidumbre estándar combinada, relativa 5.1.6, 7.2.1
incertidumbre estándar combinada y Comités Consultatifs 6.1.1, A.3
incertidumbre estándar combinada y comparaciones internacionales.....6.1.1, A.3
incertidumbre estándar, ilustración gráfica de la evaluación de la ..... 4.4.*et seqq*
incertidumbre estándar, relativa.....5.1.6
incertidumbre estándar de Tipo A, evaluación de la ..... *véase* Tipo A, evaluación de la incertidumbre estándar de

incertidumbre estándar de Tipo B, evaluación de la ..... *véase* Tipo B, evaluación de la incertidumbre estándar de
incertidumbre, evaluación estadística de la, variando las magnitudes de entrada.....3.4.1, 3.4.2, 4.2.8, F.2.1, H.5.3.3
incertidumbre, falta de un informe explícito de la 7.1.3
incertidumbre, fuentes de 3.3.2
incertidumbre, ignorando una componente de la 3.4.4
incertidumbre, informe de la..... 7 *et seqq.*
incertidumbre intrínseca.....D.3.4
incertidumbre, justificación para una evaluación realista de la .....E.2, E.2.1 -E.2.3
incertidumbre, ley de propagación de la 3.3.6, 3.4.1, 5.1.2, E.3, E.3.1, E.3.2, E.3.6, G.6.6
incertidumbre, magnitud internamente consistente para la expresión de la 0.4
incertidumbre, magnitud transferible para expresar la 0.4
incertidumbre máxima permitida.....F.2.4.2
incertidumbre, método ideal para la evaluación y expresión de la 0.4
incertidumbre, método universal para la evaluación y expresión de la 0.4
incertidumbre mínima D.3.4
incertidumbre, resumen del procedimiento para evaluar y expresar la.....8
incertidumbre segura E.1.1, E.1.2, E.2.1, E.2.3, E.4.1, F.2.3.2
incertidumbre total.....nota 3 de 2.3.5
incertidumbres, dígitos significativos de las 7.2.6
incertidumbres, redondeo de 7.2.6
independencia.....5.1. C.3.7
independientes, repeticiones.....F.1.1.2
influyente, magnitud.....3.1.5, 3.1.6, 3.2.3, 4.2.2, B.2.10
influyentes, magnitudes aleatorias F.1.1.3,F.1.1.4
información, conjunto de, para la evaluación de incertidumbre ..... nota de 3.3.5, 4.3.1, 4.3.2, 5.2.5
ISO ..... i, ii, v, A.3, B.1
ISO 3534-1 .....2.1., C.1
ISO Grupo Asesor Técnico en Metrología (ISO/TAG 4) v
ISO/TAG 4.....v
ISO/TAG 4 / WG 3 v

ISO/TAG 4/WG 3, términos de referencia para.....v
IUPAC..... i, ii, v, B.1
IUPAP ..... i, ii, v, B.1

L

laboratorios nacionales de metrología o de patrones v
Laplace-Gauss, distribución de C.2.14
legal, metrología..... *véase* metrología legal
libertad, grados de..... 4.2.6, C.2.31, E.4.3, G. G.3, G.3.2, G.3.3, G.6.3, G.6.4
libertad, grados de, efectivos..... 6.3.3, G.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2 *et seqq.*
libertad, grados de, efectivos de componentes de Tipo A únicamente..... 7.2.1, nota 3 de G.4.1
libertad, grados de, efectivos de componentes de Tipo B únicamente ..... 7.2.1, nota 3 de G.4.1
libertad, grados efectivos de, de una estimación ponderada de la varianza (o de una
desviación estándar experimental ponderada) .....H.1.6, nota de H.3.6
libertad grados de, de una incertidumbre estándar de Tipo A..... G.3.3, G.6.3, G.6.4
libertad, grados de, de una incertidumbre estándar de Tipo B G.4.2., G.4.3, G.6.3, G.6.4
límite de seguridad..... *véase* seguridad, límite de
límites superior e inferior de una magnitud de entrada ..... *véase* cotas de una magnitud de entrada

M

magnitud controlada.....F.2.4.3
magnitud influyente..... *véase* influyente, magnitud
magnitud medible ..... *véase* medible, magnitud
magnitud particular ..... *véase* particular, magnitud
magnitud realizada..... *véase* realizada, magnitud
magnitud, valor de una..... *véase* valor de una magnitud
media C.2.9, C.3.1
media aritmética ..... nota 4.2.1 de 4.1.4, C.2.19
medible, magnitud B.2.1

medición 3.1., 3.1.1, B.2.5
medición, jerarquía de la 7.1.1
medición, método de ..... *véase* método de medición
medición, modelo matemático de la 3.1.6, 3.4.1, 3.4.2, 4.1., 4.1.1., 4.1.2
medición, papel de ANOVA en la ..... H.5.3 *et seqq*
medición, exactitud de la ..... *véase* exactitud de la medición
medición, principio de ..... *véase* principio de medición
medición, procedimiento de 3.1.1, 7.1.2, B.2.8, F.1.1.2
medición, resultado de la 1.3., 3.1.2, B.2.11
medición, resultado de la, y su incertidumbre, disponibilidad de la información describiendo el 7.1.1, 7.1.3
medición, resultado de la, y su incertidumbre, formatos para reportar el 7.2.2, 7.2.4
medición, resultado de la , y su incertidumbre, reportando en detalle el 7.2.5, 7.2.7
mediciones, espectro de las, al cual se aplican los principios de esta *Guía* .....1.1.
mensurando 1.2, 3.1.1, 3.1.3, B.2.19, D.1, D.1.1, D.1.2, D.3.4
mensurando, definición o especificación del ..... *véase* mensurando
mensurando, estimación de un 4.1.4, 4.1.5, 7.2.5
mensurando, incertidumbre debida a la definición incompleta de ..... *véase* incertidumbre debida a la definición incompleta del mensurando
mensurando, mejor medición posible del.....D.3.4
mensurando, muchos valores del.....D.6.2
mensurando, valor del .....3.1.1 - 3.1.3
mensurandos, estimación de, correlacionados ..... *véase* correlación de estimaciones de
mensurandos, covarianza de, relacionados ..... *véase* correlación de estimaciones de mensurandos
método de medición 3.1.1, B.2.7
método de medición, incertidumbre del ..... *véase* incertidumbre del método de medición
método de medición, unidad dependiente de.....H.6
metrología legal.....3.4.5
mínima, incertidumbre ..... *véase* incertidumbre mínima
mínimos cuadrados, método de los 4.2.5, G.3.3, H.3, H.3.1, H.3.2
modelo matemático de la medición ..... *véase* medición, modelo matemático de la
momento central de orden *q*.....C.2.13, C.2.22, nota 1 de E.3.1
muestra, incertidumbre de la ..... *véase* incertidumbre de la muestra

N

nivel de confianza .....0.4, nota 1 de 2.3.3, notas 1 y 2 de 2.3.5, 3.3.7, 4.3.4, 6.2.2, 6.3.1, 6.3.3, G, G1.1. - G.1.3, G.2.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.6.1, G..6.4, G.6.6
nivel de confianza mínimo F.2.3.2
no corregido, resultado B.2.12
no lineal, relación funcional ..... *véase* funcional, relación,
no lineal normal, distribución..... nota 1. De 4.2.3, nota de 4.3.2, 4.3.4 - 4.3.6, nota 1 de 4.3.9, 4.4.2, 4.4.6, C.2.14, E.3.3, F.2.3.3, G.1.3, G.1.4, G.2.1 - G.2.3, nota 2 de G.5.2

O

observaciones, pares independientes de, simultáneas..... 5.2.3, C.3.4, F.1.2.2, H.2.2, H.2.4, H.4.2
observaciones repetidas .....3.1.4 - 3.1.6, 3.2.2, 3.3.5, 4.2.1., 4.2.3, 4.3.1, 4.4.1, 4.4.3, 5.2.3, E.4.2, E.4.3, F.1, F.1.1., F.1.1.2, G.3.2
OIML.....i, ii, v, A.3, B.a
Oficina Internacional de Pesas y Medidas .....*véase* BIPM
orden mayor, términos de .....nota de 5.1.2, E.3.1, H.1.7
Organización Internacional para la Normalización ..... *véase* ISO
Organización Internacional para la Metrología Legal..... *véase* OIML

P

parámetro.....C.2.7
particular, magnitud ..... 3.1.1, nota 1 de B.2.1
población C.2.16
ponderada, estimación, de la varianza ..... *véase* varianza, estimación ponderada de la
precisión..... nota 2 de B.2.14
principio de medición B.2.6
probabilidad .....3.3.5, 4.3.7 - 4.3.9, C.2.1, E.3.5, E.3.6, F.2.3.3

probabilidad de cobertura ..... *véase* cobertura, probabilidad de
probabilidad, convolución de distribuciones de ..... nota 2 de 4.3.9, G.1.4 - G.1.6, G.2.2, G.6.5
probabilidad, distribución de ..... 3.3.4, nota 1 de 4.1.1, 4.1.6, nota 1 de 4.2.3, 4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
probabilidad, elemento de ..... nota de C.2.5, F.2.4.4
probabilidad, función de, de masa C.2.6
probabilidad, subjetiva 3.3.5,D.6.1
probabilidad, convolución de ..... nota 2 de 4.3.9, G.1.4 - G.1.6
distribuciones de G.2.2, G.6.5
probabilidad, distribución de ..... 3.3.4, nota 1 de 4.1.1.4.1.6
nota 1 de 4.2.3, 4.4.1 - 4.4.4, C.2.3, E.4.2, G.1.4, G.1.5
probabilidad, función de ..... 3.3.5, nota 2 de 4.3.8,4.4.2
densidad de ..... 4.4.5,4.4.6,C2.5,F.2.4.4.
procedimiento de medida 3.1.1, 7.1.1, B.2.8, F.1.1.2
promedio ..... véase media aritmética
propagación de la ..... véase incertidumbre, ley
incertidumbre, ley de ..... general de propagación de la
propagación de los errores, ley ..... véase errores, ley general de
general de ..... propagación de los

R

Recomendación I (CI-1981), CIPM ..... i, 0.5 , 6.1.1 , A.2 , A.3
Recomendación I (CI-1986), CIPM ..... 0.5 , 6.1.1 , 6.1.2, A.3
Recomendación INC-1 (1980), ... i, v, 0.5 , 0.7 , 3.3.3 , 6.1.1
CIPM ..... 6.1.2 , 6.3.3 , A.1 , A.3 , E, E.2.3 , E.3.7
relación funcional ..... 4.1.1 , 4.12
relación funcional no lineal ..... nota de 4.1.4 , nota de 5.12., nota de F.2.4.4 , G.1.5 , H.1.7, H.2.4
recta de calibración ..... H.3 y sgtes.
relativo, error ..... véase error relativo
repetibilidad de los resultados de medida B.2.15

repetibilidad, condiciones de ..... véase condiciones de repetibilidad
repetidas, observaciones.....véase observaciones repetidas
repeticiones independientes.....F.1.1.2
reproducibilidad de los
resultados de medida..... B.2.16
resultado corregido .....B.2.13 , D.3.1 , D.3.4 , D.4
resultado de medida.....1.3 , 3.1.2 , B.2.11
resultado de medida y su incertidumbre, disponibilidad de información que describe el .....7.1.1 , 7.1.3
resultado de medida y su incertidumbre, expresión detallada del.....7.1.4 , 7.2.7
resultado de medida y su incertidumbre, formulación para la expresión del .....7.2.2 , 7.2.4
resultado corregido B.2.12

S

salida, estimación de .....véase límites de seguridad
salida, magnitud de ..... véase magnitud de salida
seguridad, límites de.....nota de 6.3.1
serie de Taylor.....véase Taylor, serie de
sesgo.....nota de 3.2.3
salida, estimación de .....4.1.4, 4.1.5 , 7.2.5
salida, magnitud de ..... 1.2 , 3.1.1 , 3.1.3 , B.2.19 , D.1, D.1.1 , D.1.2 , D.3.4
sistemático .....3.3.3, E.1.3, E.3.4 - E.3.7
sistemático, efecto.....3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, D.6.1, E.1.1 , E.3 , E.4.4
sistemático, error.....3.2.1, 3.2.3 , B.2.22
Sistema internacional de Unidades (SI) 0.3, 3.4.6
Student, distribución de..... C.3.8, G.3.2

T

Taylor, serie de..... 5.1.2, E.3.1, G.1.5, G.4.2, H.1.7, H.2.4

t, distribución..... nota 1 de 4.2.3, C.3.8, G.3, G.3.2,G.3.4, G.4.1, G.4.2, G.5.4, G.6.2, G.5.4, G.6.2, G.5.4, G.6.2
t, distribución, percentiles de la t, factor .....E.3.3, G.3.2, G.3.4, G.4.1, G.5.4, G.6.2, G.6.4 - G.6.6
teorema del límite central.....G.1.6, G.2, G.2.1 - G.2.3, G.6.2, G.6.5, G.6.
términos de mayor grado.....nota de 5.12, E.3.1, H.1.7
test F H.5.2.2, H.5.2.4
teorema del límite central..... G.1.6, G.2, G.2.1, G.2.3, G.6.2, G.6.5, G.6.6
Tipo A, evaluación de la covarianza.....5.2.3
Tipo A, evaluación de la incertidumbre típica de . 4.2.1 - 4.2.8, 4.3.2, 4.4.1 - 4.4.3, E.3.7, F.1, F.1.1.1 - F.1.2.4
Tipo A, incertidumbre típica 3.3.5, 4.23, C.3.3
Tipo A, incertidumbre típica combinada..... 7.2.1, nota 3 de G.4.1
Tipo A, varianza 4.23
Tipo B, evaluación de la covarianza 5.25
Tipo B, evaluación de la incertidumbre típica de ..... 4.3.1 - 4.3.11, 4.4.4 - 4.4.6, E.3.7, F.2 y sgtes.
Tipo B, incertidumbre típica..... 3.35, 4.3.1, C.3.3
Tipo B, incertidumbre típica combinada ..... 7.2.1, nota 3 de G.4.1
Tipo B, necesidad de evaluaciones F.2.1
Tipo B, varianza 4.3.1
tolerancia, intervalo de ..... nota de C.2.30

U

UICPA..... véase Unión Internacional de Química Pura y Aplicada
UIPPA ..... véase Unión Internacional de Física Pura y Aplicada
Unión Internacional de Química pura y aplicada.....véase IUPAC
Unión Internacional de Física pura y aplicada..... véase IUPAP
unidad, utilización de un valor adoptado como unidad para un valor patrón .....3.4.6, nota de 4.2.8
unilateral, intervalo de confianza.....C.2.28

V

valor de una magnitud 3.1.1, B.2.2
valor convencionalmente verdadero de una magnitud B.2.4
valor de entrada o magnitud de entrada de origen externo F.2.3, F.2.3.1
valor verdadero de una ..... 2.2.4, nota de 3.1.1, B.2.3, D,
magnitud ..... D.3, D.3.1, D.3.4, D.3.5, E.5.1 - E.5.4
valores aberrantes 3.4.7
variable aleatoria ..... nota 1 de 4.1.1, 4.2.1, nota 1 de 4.2.3, C.2.2, C.3.8, E.3.4, F.1.2.1, G.3.2
variable aleatoria centrada C.2.10
varianza 3.1.7, 4.2.2, 4.23, C.2.11, C.2.20, C.3.2
varianza combinada 3.3.6, 5.12
varianza de Allan ..... nota de 4.2.7
varianza de la media 4.2.3, C.3.2
varianza de Tipo A 4.2.3
varianza de Tipo B 4.3.1
varianza experimental (o estimación de varianza) ..... 4.2.2, nota de H.3.6
varianza experimental de la media 4.2.3, C.3.2
varianza proveniente de un conjunto de datos, estimación de la
(o estimación de la desviación típica experimental proveniente de
un conjunto de datos) ..... H.5.2.5, H.6.3.1, nota de H.6.3.2
varianza relativa 5.1.6
varianza relativa combinada 5.1.6
varianza, análisis de la ..... véase ADEVA
VIM 2.1, 2.2.3, 2.2.4, b.1
Vocabulario Internacional de términos fundamentales y generales de metrología ..... véase VIM

W

Welch-Satterhwaite, fórmula de G.4.1, G.4.2, G.6.2, G.6.4